

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

Р. М. Минькова

Интегралы по фигуре и теория поля

Учебное пособие

для студентов дистанционной и заочной форм обучения

Научный редактор – доц. В.Б. Грахов

Екатеринбург
2006

УДК 517(075.8)
ББК 22.161 я73
М 62

Рецензенты:

кафедра высшей математики Уральского государственного экономического-
университета, зав. кафедрой проф., канд. физ.-мат. наук Н.И. Чвялева;

проф., д-р физ.-мат. наук И. В. Мельникова (Уральский государственный уни-
верситет им. А.М. Горького, кафедра математического анализа)

Автор: Р. М. Минькова

М 62 Интегралы по фигуре и теория поля: учебное пособие для студентов
дистанционной и заочной форм обучения / Р.М.Минькова. Екатеринбург: ГОУ
ВПО УГТУ-УПИ, 2006. 47 с.

ISBN 5-321-00629-6

Рассмотрены интегралы по фигуре: двойные, тройные, криволинейные, по-
верхностные, их свойства и применения. Рассмотрено векторное поле и его ос-
новные характеристики: векторные линии, поток, линейный интеграл и цирку-
ляция, дивергенция, ротор. Приводятся решения типовых примеров. Предлага-
ются задачи для самостоятельного решения.

Библиогр.: 11 назв. Рис.41.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные
методы и уравнения математической физики»

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161 я73

ISBN 5-321-00629-6

© ГОУ ВПО «Уральский государственный
технический университет – УПИ», 2006
© Р.М.Минькова, 2006

Оглавление

Глава 1. Интегралы по фигуре

1. Понятие интеграла по фигуре, его свойства и применения.....	4
1.1. Фигура и ее мера.....	4
1.2. Задача о вычислении массы.....	4
1.3. Понятие интеграла по фигуре.....	5
1.4. Конкретные виды интегралов по фигуре.....	5
1.5. Свойства интеграла по фигуре.....	7
1.6. Механические приложения интеграла по фигуре.....	8
2. Вычисление интегралов по фигуре.....	9
2.1. Вычисление криволинейного интеграла 1 рода.....	9
2.2. Вычисление двойного интеграла в прямоугольной системе координат...11	
2.3. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.....	14
2.4. Вычисление тройного интеграла.....	17
2.5. Вычисление поверхностного интеграла 1 рода.....	21

Глава 2. Теория поля

3. Скалярное поле.....	24
3.1. Производная поля по направлению.....	24
3.2. Градиент поля и его свойства.....	25
4. Понятие векторного поля. Векторные линии.....	27
5. Поток векторного поля.....	29
5.1. Задача о количестве жидкости.....	29
5.2. Понятие потока и его вычисление.....	30
5.3. Поток через замкнутую поверхность. Дивергенция поля.....	32
6. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля.....	34
6.1. Задача о работе силы.....	34
6.2. Понятие линейного интеграла и его вычисление.....	35
6.3. Вычисление циркуляции. Ротор поля.....	37
6.4. Условия независимости линейного интеграла от формы пути.....	40
7. Потенциальные, соленоидальные, гармонические поля.....	43
Библиографический список.....	46

Глава 1. Интегралы по фигуре

Ранее был изучен определенный интеграл, т.е. интеграл по отрезку. В данном пособии будут рассмотрены двойные, тройные, криволинейные, поверхностные интегралы, т.е. интегралы соответственно по плоской области, по телу, по дуге, по поверхности.

1. Интегралы по фигуре, их свойства и применения

Для единообразного введения интегралов рассмотрим понятие фигуры и её меры.

1.1. Фигура и её мера

Объединим общим названием “фигура” – отрезок $[a,b]$, дугу (l) , плоскую область (S) , поверхность (σ) , тело (V) . Отрезок и дугу назовем одномерной фигурой, плоскую область и поверхность – двумерной фигурой, тело – трехмерной фигурой.

С понятием фигуры тесно связано понятие её меры. Мерой одномерной фигуры назовем её длину, мерой двумерной фигуры назовем её площадь, мерой трехмерной фигуры назовем её объём. Для фигур (l) , (S) , (σ) , (V) их меры соответственно обозначим l , S , σ , V . В общем случае фигуру обозначим (Φ) , а её меру – той же буквой Φ , но без скобок.

Для дальнейшего изложения введем понятие диаметра фигуры. Назовем диаметром фигуры наибольшее из расстояний между её точками. Например, диаметр шара радиуса R равен $2R$, диаметр куба равен длине его диагонали. Обозначение диаметра фигуры (Φ) : $diam(\Phi)$.

В дальнейшем будем предполагать, что 1) фигура (Φ) – ограничена, т.е. имеет конечный диаметр, 2) фигура (Φ) – замкнута, т.е. включает границу.

1.2. Задача о вычислении массы фигуры

Пусть (Φ) – произвольная фигура, в каждой точке P которой известна плотность распределения масс $\gamma(P)$. Разобьём фигуру (Φ) на n малых ячеек $(\Delta\Phi_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$). В каждой ячейке $(\Delta\Phi_k)$ выберем произвольную точку P_k (рис.1). В силу малости диаметра ячейки её плотность в каждой точке можно считать постоянной и равной $\gamma(P_k)$. Тогда масса ячейки Δm_k приближенно равна произведению плотности на меру ячейки, т.е. $\Delta m_k \approx \gamma(P_k) \cdot \Delta\Phi_k$. Суммируя массы всех ячеек, получим массу фигуры

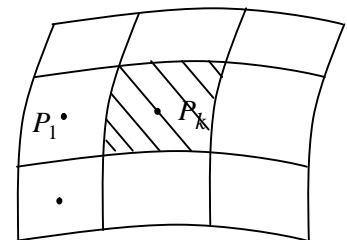


Рис.1

$$m \approx \sum_{k=1}^n \gamma(P_k) \cdot \Delta\Phi_k . \quad (1.1)$$

Это приближенное равенство будет тем точней, чем меньше диаметры всех ячеек или максимальный из диаметров ячеек $d = \max diam(\Delta\Phi_k)$. Точное значение массы фигуры определяется как предел суммы (1.1) при $d \rightarrow 0$

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \gamma(P_k) \cdot \Delta\Phi_k .$$

Этот предел называют интегралом от функции $\gamma(P)$ по фигуре (Φ) и обозначают $\int_{(\Phi)} \gamma(P) d\Phi$.

К пределам такого типа приводят и другие задачи. Абстрагируясь от конкретной задачи о массе фигуры, дадим общее понятие интеграла по фигуре.

1.3. Понятие интеграла по фигуре

Пусть на фигуре (Φ) определена скалярная функция $f(P)$. Так же, как и в задаче о массе фигуры, разобьем фигуру (Φ) на n ячеек $(\Delta\Phi_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$). В каждой ячейке $(\Delta\Phi_k)$ выберем произвольную точку P_k . Составим сумму $\sum_{k=1}^n f(P_k) \cdot \Delta\Phi_k$. Эта сумма называется интегральной суммой функции $f(P)$ по фигуре (Φ) . Найдем предел интегральной суммы при стремлении к нулю максимального d из диаметров ячеек.

Определение. Если существует предел интегральной суммы при $d \rightarrow 0$, не зависящий от способа разбиения фигуры и выбора точек P_k , то этот предел называется интегралом функции $f(P)$ по фигуре (Φ) и обозначается $\int_{(\Phi)} f(P) d\Phi$.

Таким образом, по определению мы имеем

$$\int_{(\Phi)} f(P) d\Phi = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \cdot \Delta\Phi_k. \quad (1.2)$$

1.4. Конкретные виды интегралов по фигуре

В п. 1 мы рассматривали фигуры пяти видов: отрезок, дугу кривой, поверхность, плоскую область, тело. В соответствии с этим мы получим следующие пять видов интегралов по фигуре:

1). Если фигура (Φ) является отрезком $[a, b]$, то интеграл называется **определенным интегралом** и обозначается $\int_a^b f(x) dx$. По определению (1.2) он равен

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k.$$

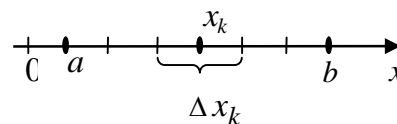


Рис.2

Здесь x_k – координаты выбранных точек P_k , Δx_k – меры ячеек разбиения, т.е. длины частичных отрезков (рис.2), d – максимальный из Δx_k . Получили изученное ранее понятие определенного интеграла.

2). Если фигура (Φ) является дугой кривой (l) , то интеграл по такой фигуре называется **криволинейным интегралом 1-ого рода** и обозначается $\int_{(l)} f(P) dl$. По определению (1.2)

$$\int_{(l)} f(P) dl = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \cdot \Delta l_k.$$

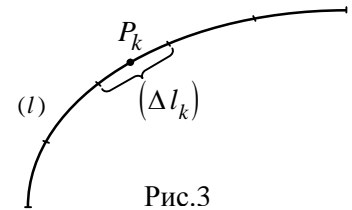


Рис.3

Здесь Δl_k – меры ячеек, в данном случае длины частичных дуг (Δl_k); d – максимальное из $diam(\Delta l_k)$ (рис.3).

3). Если фигура (Φ) является поверхностью (σ), то интеграл по такой фигуре называется **поверхностным интегралом 1-го рода** и обозначается $\int_{(\sigma)} f(P) d\sigma$. По определению (1.2)

$$\int_{(\sigma)} f(P) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \cdot \Delta \sigma_k.$$

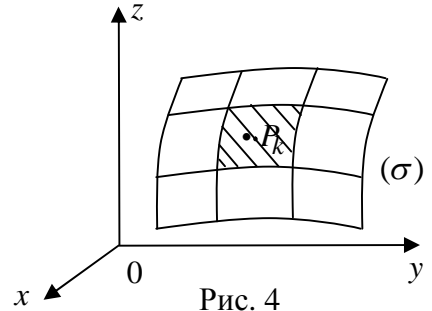


Рис. 4

Здесь $\Delta \sigma_k$ – меры ячеек, в данном случае их площади; d – максимальное из $diam(\Delta \sigma_k)$ (рис.4).

4). Если фигура (Φ) является плоской областью (S), то интеграл по такой фигуре называется **двойным интегралом** и обозначается $\int_{(S)} f(P) dS$. По определению (1.2):

$$\int_{(S)} f(P) dS = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \cdot \Delta S_k.$$

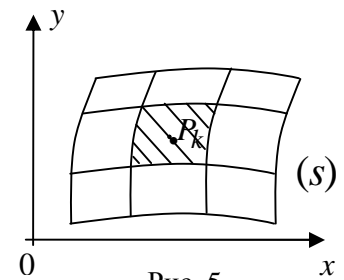


Рис. 5

Здесь ΔS_k – меры ячеек, в данном случае их площади; d – максимальное из $diam(\Delta S_k)$ (рис.5).

5). Если фигура (Φ) является телом (V), то интеграл по такой фигуре называется **тройным интегралом** и обозначается $\int_{(V)} f(P) dV$. По определению (1.2)

$$\int_{(V)} f(P) dV = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \cdot \Delta V_k.$$

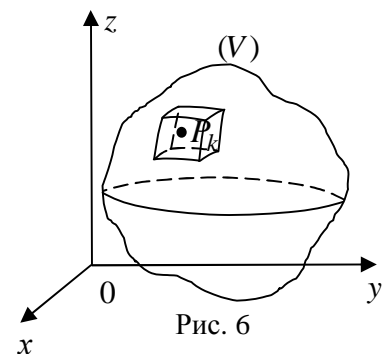


Рис. 6

Здесь ΔV_k – меры ячеек, в данном случае их объёмы; d – максимальное из $diam(\Delta V_k)$ (рис.6).

Рассмотрим еще одну часто употребляемую форму записи двойного интеграла. Двойной интеграл – это интеграл по плоской области (S). Пусть эта область лежит в плоскости XOY . Так как интеграл не зависит от способа разбиения фигуры на ячейки, то разобьём фигуру на ячейки прямыми, параллельными оси OY , с расстояниями Δx между ними и прямыми, параллельными оси OX , с расстояниями Δy между ними (рис.7). Тогда площадь любой ячейки, кроме приграничной, равна $\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y$, Поэтому dS и интеграл записывают в следующем виде:

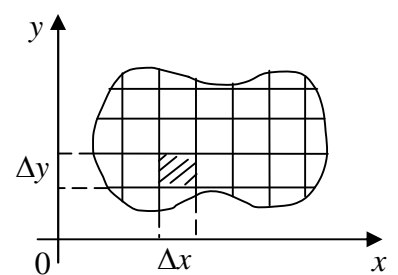


Рис. 7

$$dS = dx \cdot dy ,$$

$$\boxed{\int_{(S)} f(P)dS = \iint_{(S)} f(x, y) dx dy .}$$

Аналогичная форма записи принята и для тройного интеграла

$$\boxed{\int_{(V)} f(P) dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz .}$$

1.5. Свойства интеграла по фигуре

Пусть, как предполагалось ранее, фигура (Φ) — ограничена и замкнута.

1. Теорема существования

Если функция $f(P)$ непрерывна на фигуре (Φ) , то существует интеграл $\int_{(\Phi)} f(P)d\Phi$ (т.е. существует предел интегральных сумм, не зависящий от способа разбиения фигуры на ячейки и от выбора точек P_k).

В дальнейшем будем предполагать, что интегралы, о которых идет речь, существуют.

2. Свойство линейности

$$\int_{(\Phi)} (\lambda f(P) + \mu g(P)) d\Phi = \lambda \int_{(\Phi)} f(P) d\Phi + \mu \int_{(\Phi)} g(P) d\Phi, \text{ где } \lambda \text{ и } \mu \text{ — константы.}$$

3. Свойство аддитивности

Пусть фигура (Φ) разбита (рис.8) на части (Φ_1) и (Φ_2) . Тогда

$$\int_{(\Phi)} f(P) d\Phi = \int_{(\Phi_1)} f(P) d\Phi + \int_{(\Phi_2)} f(P) d\Phi .$$

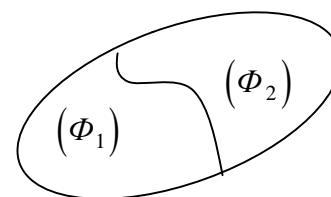


Рис.8

Так как интеграл по фигуре численно равен массе фигуры с плотностью $f(P)$, то физический смысл этого свойства следующий: масса всей фигуры (Φ) равна сумме масс её частей (Φ_1) и (Φ_2) .

4. О вычислении меры фигуры

Мера Φ фигуры (Φ) вычисляется по формуле

$$\Phi = \int_{(\Phi)} d\Phi .$$

Это свойство следует из определения интеграла по фигуре (Φ) от функции $f(P) \equiv 1$:

$$\int_{(\Phi)} 1 \cdot d\Phi = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta\Phi_k = \lim_{d \rightarrow 0} \Phi = \Phi .$$

В частности, из этой формулы мы имеем формулы для отыскания длины l дуги (l) , площади S плоской области (S) , площади σ поверхности (σ) , объема V тела (V) :

$$\boxed{l = \int_{(l)} dl, \quad S = \int_{(S)} dS, \quad \sigma = \int_{(\sigma)} d\sigma, \quad V = \int_{(V)} dV .} \quad (1.3)$$

5. Об оценке интеграла

$$\left| \int_{(\Phi)} f(P) d\Phi \right| \leq \int_{(\Phi)} |f(P)| d\Phi;$$

$$m \cdot \Phi \leq \int_{(\Phi)} f(P) d\Phi \leq M \cdot \Phi,$$

где m, M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(P)$ на фигуре (Φ) .

6. Теорема о среднем

Пусть функция $f(P)$ непрерывна на фигуре (Φ) . Тогда на (Φ) существует точка \tilde{P} такая, что

$$\int_{(\Phi)} f(P) d\Phi = f(\tilde{P}) \cdot \Phi \quad \text{или} \quad f(\tilde{P}) = \frac{1}{\Phi} \int_{(\Phi)} f(P) d\Phi.$$

Выражение в правой части последней формулы называется средним значением функции $f(P)$ на фигуре (Φ) и обозначается f_{cp} . Оно используется в прикладных задачах.

Отметим, что перечисленные свойства интеграла по фигуре доказываются так же, как соответствующие свойства определенного интеграла, изученного ранее.

1.6. Механические приложения интеграла по фигуре

1. Вычисление массы фигуры

Пусть известна плотность распределения масс $\gamma(P)$. Тогда масса фигуры (Φ) , как было установлено в п. 1.2, вычисляется по формуле

$$m = \int_{(\Phi)} \gamma(P) d\Phi. \quad (1.4)$$

2. Отыскание координат центра тяжести фигуры

Пусть центр тяжести фигуры находится в точке C с координатами x_c, y_c, z_c . Как и при вычислении массы, разобьем фигуру (Φ) на n малых ячеек $(\Delta\Phi_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). В каждой ячейке выберем точку P_k с координатами x_k, y_k, z_k (рис.9). В точке P_k сосредоточим массу k -й ячейки $\Delta m_k \approx \gamma(P_k) \cdot \Delta\Phi_k$. Тем самым мы заменили фигуру (Φ) системой материальных точек P_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Для такой

системы абсцисса центра тяжести равна $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \Delta m_k$, где m — масса всей системы. Следовательно, для абсциссы центра тяжести первоначальной фигуры имеем

$$x_c \approx \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \Delta m_k = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \gamma(P_k) \Delta\Phi_k.$$

Это приближённое равенство будет тем точнее, чем меньше диаметры ячеек. Поэтому устремим максимальный из диаметров ячеек к нулю и перейдем к пределу. Получим

$$x_c = \frac{1}{m} \int_{(\Phi)} x \cdot \gamma(P) d\Phi. \quad (1.5)$$

Аналогично вычисляются две другие координаты центра тяжести

$$y_c = \frac{1}{m} \int_{(\Phi)} y \cdot \gamma(P) d\Phi, \quad z_c = \frac{1}{m} \int_{(\Phi)} z \cdot \gamma(P) d\Phi. \quad (1.6)$$

3. Вычисление моментов инерции фигуры

Выведем, например, формулу для вычисления момента инерции I_{XOY} фигуры относительно плоскости XOY . Для этого, как и в предыдущем случае, разобьем фигуру на ячейки (рис.9), выберем в k -й ячейке точку P_k ($k = 1, 2, \dots, n$) и в ней сосредоточим массу ячейки. Момент инерции этой точки относительно плоскости XOY равен квадрату расстояния от точки до плоскости XOY , т.е. z_k^2 , умноженному на массу, сосредоточенную в точке, т.е. на Δm_k . Суммируя моменты инерции выбранных точек, получим

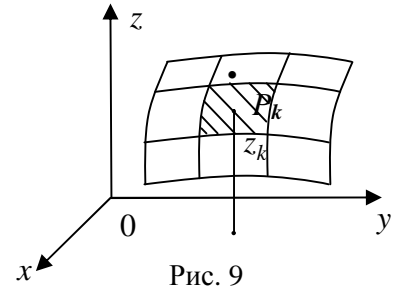


Рис. 9

$$I_{XOY} \approx \sum_{k=1}^n z_k^2 \cdot \Delta m_k = \sum_{k=1}^n z_k^2 \cdot \gamma(P_k) \cdot \Delta \Phi_k.$$

В пределе, устремляя диаметры ячеек к нулю, получим точное равенство

$$I_{XOY} = \int_{(\Phi)} z^2 \cdot \gamma(P) d\Phi. \quad (1.7)$$

Аналогично вычисляются моменты инерции фигуры, относительно плоскостей XOY и YOZ , и момент инерции I_0 относительно начала координат:

$$I_{XOZ} = \int_{(\Phi)} y^2 \cdot \gamma(P) d\Phi, \quad I_{YOZ} = \int_{(\Phi)} x^2 \cdot \gamma(P) d\Phi; \quad (1.8)$$

$$I_{OX} = \int_{(\Phi)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(P) d\Phi, \quad I_{OY} = \int_{(\Phi)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(P) d\Phi; \quad (1.9)$$

$$I_{OZ} = \int_{(\Phi)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(P) d\Phi, \quad I_0 = \int_{(\Phi)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(P) d\Phi. \quad (1.10)$$

Мы ввели понятие интеграла по фигуре, рассмотрели его свойства и применения. Теперь рассмотрим вычисление интегралов по фигуре. Каждый конкретный вид интеграла – криволинейный, двойной, тройной, поверхностный – вычисляется по-своему.

2. Вычисление интегралов по фигуре

Рассмотрим сначала вычисление криволинейного интеграла.

2.1. Вычисление криволинейного интеграла 1-ого рода

Пусть известны параметрические уравнения линии интегрирования дуги AB : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Пусть началу дуги – точке A – соответствует значение параметра t_A , а концу дуги – точке B – соответствует значение параметра t_B .

Для вычисления криволинейного интеграла $\int_{\cup AB} f(x, y, z) dl$ нужно:

1) заменить x, y, z в подынтегральной функции их значениями на дуге;

- 2) заменить дифференциал дуги dl его выражением $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt$;
 3) вычислить получившийся определенный интеграл по отрезку $[t_A, t_B]$.

Итак, справедлива следующая формула

$$\int_{\cup AB} f(x, y, z) dl = \int_{t_A}^{t_B} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt. \quad (2.1)$$

Вывод этой формулы в программу не входит.

Пример 2.1. Найти массу верхней полуокружности радиуса R , если плотность γ в каждой её точке равна ординате этой точки.

Решение. Масса **кривой** вычисляется с помощью **криволинейного** интеграла:

$$m = \int_{(L)} \gamma \cdot dl = \int_{(L)} y \cdot dl.$$

Для вычисления этого интеграла запишем параметрические уравнения окружности:

$$x = R \cdot \cos t, \quad y = R \cdot \sin t, \quad z = 0.$$

Параметр t есть угол между радиус-вектором точки окружности и осью Ox (рис.10). Для верхней полуокружности t меняется от 0 до π . Теперь вычислим dl :

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt = \sqrt{(-R \cdot \sin t)^2 + (R \cdot \cos t)^2} dt = R dt.$$

Подставим в искомый интеграл $\int_{(L)} y \cdot dl$ выражения для y , dl , расставим пределы изменения t и вычислим получившийся определенный интеграл:

$$m = \int_0^{\pi} R \sin t \cdot R dt = R^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = -R^2 \cos t \Big|_0^{\pi} = 2R^2.$$

Пример 2.2. Вычислить момент инерции относительно оси Ox однородной дуги кривой $y = e^x$ ($0 \leq x \leq 1$).

Решение. Момент инерции кривой вычисляется с помощью криволинейного интеграла по формуле 1.9:

$$I_{Ox} = \int_{(L)} (y^2 + z^2) \gamma dl = \gamma \int_{(L)} (y^2 + z^2) dl.$$

Для однородной дуги её плотность является постоянной, поэтому γ вынесли за знак интеграла. Для вычисления интеграла нужно записать параметрические уравнения дуги интегрирования. Для этого присоединим к уравнению $y = e^x$ очевидное тождество $x = x$ и учтем, что дуга лежит в плоскости XOY с уравнением $z = 0$. Мы получим параметрические уравнения дуги:

$$x = x, \quad y = e^x, \quad z = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Здесь роль параметра играет x . Поэтому

$$dl = \sqrt{x_x'^2 + y_x'^2 + z_x'^2} dx = \sqrt{1 + (e^x)^2} dx.$$

Подставляя в искомый интеграл выражения для y , z , и dl , получим

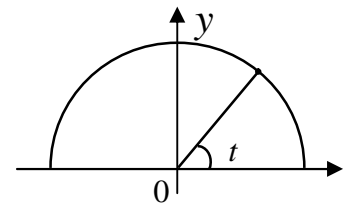


Рис. 10

$$I_{Ox} = \gamma \int_0^1 (e^x)^2 \sqrt{1+(e^x)^2} dx = \gamma \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}} \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 (1+e^{2x})^{1/2} d(e^{2x}) = \\ = \frac{1}{2} \gamma (1+e^{2x})^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^1 = \frac{\gamma}{3} \left[(1+e^2)^{3/2} - 2^{3/2} \right].$$

Примеры для самостоятельного решения

- 1) Найти массу участка линии $y = \ln x$ между точками с абсциссами $x=1$ и $x=2$, если плотность линии в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.
- 2) Вычислить момент инерции относительно оси OZ первого витка винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, если плотность $\gamma = 1$.

Ответы. 1) $(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})/3$, 2) $2\pi\sqrt{2}$.

2.2. Вычисление двойного интеграла в прямоугольной системе координат

Вычисление двойного интеграла $\int_{(S)} f(P)dS = \iint_{(S)} f(x,y)dxdy$ сводится к вычислению двух определенных интегралов. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть область (S) в плоскости HOY (рис.11) ограничена линиями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$. Тогда

$$\boxed{\iint_{(S)} f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy.} \quad (2.2)$$

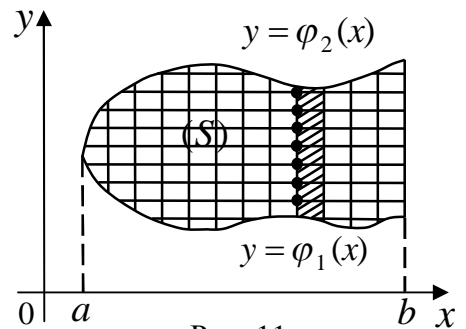


Рис. 11

Интеграл, стоящий в правой части формулы (2.2), называют повторным или двукратным. В этом интеграле сначала вычисляют внутренний интеграл при фиксированном x . В результате получают функцию, зависящую от переменной x : $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy$.

Затем вычисляют внешний интеграл от функции $F(x)$.

Дадим нестрогое (физическое) обоснование формулы (2.2) для случая неотрицательной подынтегральной функции $f(x,y)$. Как было установлено ранее, двойной интеграл $\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$ равен массе пластины (S) с плотностью $f(x,y)$.

Покажем, что повторный интеграл, стоящий в правой части равенства (2.2), также равен массе пластины (S) . Для этого разобьём фигуру (S) на ячейки прямыми, параллельными осям координат (рис.11). Выделим вертикальную полоску. В каждой её ячейке выберем точку так, чтобы все выбранные точки лежали на одной вертикали (рис.11). Вычислим плотность $f(x,y)$ в выбранной точке и массу прямоугольной ячейки

$$m_{\text{яч.}} \approx f(x,y) \Delta S = f(x,y) \Delta x \Delta y.$$

Подсчитаем массу вертикальной полоски $m_{пол.}$, просуммировав массы ячеек и вынеся за знак суммы общий множитель Δx

$$m_{пол.} \approx \left(\sum f(x, y) \Delta y \right) \Delta x.$$

Так как выбранные точки лежат на одной вертикали, то они имеют одинаковую абсциссу x , т.е. x – фиксировано в сумме $\sum f(x, y) \Delta y$, и эта сумма является интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по переменной y , изменяющейся на отрезке $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ (рис.11). При малых значениях Δy интегральная сумма функции близка к интегралу от этой функции, т.е.

$$\sum f(x, y) \Delta y \approx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого приближенного равенства, является функцией от x и выше был обозначен через $F(x)$. Поэтому для массы вертикальной полоски имеем

$$m_{пол.} \approx F(x) \Delta x.$$

Суммируя массы всех вертикальных полосок, получим приближенное значение массы пластины

$$m \approx \sum F(x) \Delta x.$$

Сумма $\sum F(x) \Delta x$ является интегральной суммой функции $F(x)$ по переменной x , изменяющейся на отрезке $[a, b]$. При $\Delta x \rightarrow 0$ эта интегральная сумма стремится к интегралу $\int_a^b F(x) dx$. Подставляя выражение для $F(x)$ через интеграл, получим

$$m = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Таким образом, масса пластины, с одной стороны, равна двойному интегралу из формулы (2.2), с другой стороны, равна двукратному интегралу из той же формулы. Следовательно, эти интегралы равны между собой.

Чтобы успешно пользоваться на практике формулой (2.2), рекомендуем:

- 1) построить область интегрирования;
- 2) записать двойной интеграл через повторный; в повторном интеграле **сначала** расставить **внутренние** пределы интегрирования, т.е. пределы изменения y . Для этого на чертеже (рис.11) нужно двигаться параллельно оси OY . При этом мы войдем в фигуру через линию, на которой $y = \varphi_1(x)$, а выйдем через линию, на которой $y = \varphi_2(x)$, т.е. переменная интегрирования y меняется от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$;
- 3) проецируя область (S) на ось OX , расставить **внешние** пределы интегрирования (это всегда – **числа**, а не функции);
- 4) вычислить внутренний интеграл при постоянном x , затем – внешний интеграл.

Случай 2. Пусть область (S) в плоскости $ХОУ$ (рис.12) ограничена линиями $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, $y = c$, $y = d$. Тогда

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx. \quad (2.3)$$

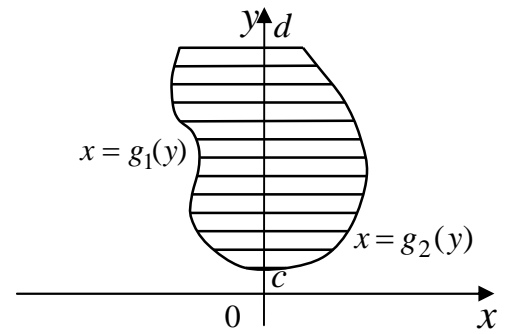


Рис. 12

Чтобы пользоваться формулой (2.3), рекомендуем:

- 1) построить область интегрирования;
- 2) записать двойной интеграл через повторный; в повторном интеграле **сначала** расставить **внутренние** пределы интегрирования, т.е. пределы изменения x . Для этого на чертеже (рис.12) нужно двигаться параллельно оси OX . При этом мы войдем в фигуру через линию, на которой $x = g_1(y)$, а выйдем через линию, на которой $x = g_2(y)$, т.е. переменная интегрирования y меняется от $g_1(y)$ до $g_2(y)$;
- 3) проецируя область (S) на ось OY , расставить **внешние** пределы интегрирования (это всегда – **числа**);
- 4) вычислить внутренний интеграл при постоянном y , затем – внешний интеграл.

Пример 2.3. Вычислить момент инерции относительно оси OY плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$, $y = 3 - x^2$, если плотность $\gamma = 1$.

Решение. Момент инерции плоской фигуры вычисляется с помощью двойного интеграла по формуле 1.9 при $z = 0$:

$$I_{OY} = \int_{(S)} x^2 \gamma dS = \iint_{(S)} x^2 dx dy.$$

Чтобы вычислить двойной интеграл, построим область (S) (рис.13). Найдем точки пересечения A и B линий $y = 2x^2$, $y = 3 - x^2$. Получим $x = \pm 1$, $y = 2$. Таким образом, фигура (S) ограничена снизу линией $y = 2x^2$, сверху – линией $y = 3 - x^2$; $x \in [-1; 1]$. Поэтому удобно использовать формулу (2.2):

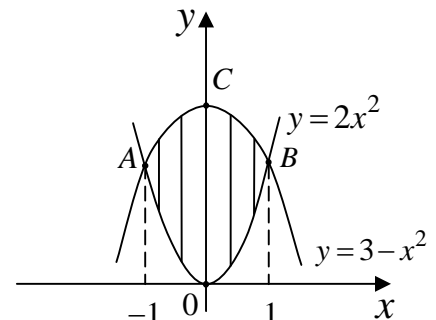


Рис. 13

$$I_{OY} = \iint_{(S)} x^2 dx dy = \int_{-1}^1 x^2 dx \int_{2x^2}^{3-x^2} dy = \int_{-1}^1 x^2 \left(y \Big|_{2x^2}^{3-x^2} \right) dx = \int_{-1}^1 x^2 (3 - 3x^2) dx.$$

Так как подынтегральная функция четная, то интеграл от неё по промежутку $[-1; 1]$ равен удвоенному интегралу по промежутку $[0; 1]$. Поэтому

$$I_{OY} = 2 \cdot 3 \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = 6 \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{5}.$$

Пример 2.4. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$, $y = 0$, если плотность $\gamma = y$.

Решение. Построим фигуру (рис.14). Линия $y = \sqrt{x}$ есть верхняя половина параболы $y^2 = x$, линия $x + y = 2$ – прямая. Фигура ограничена сверху двумя линия-

ми $y = \sqrt{x}$ и $x + y = 2$. Поэтому использовать формулу (2.2) нерационально: придется разбить область на две части (S_1) и (S_2), а интеграл – на сумму двух интегралов.

Удобнее воспользоваться формулой (2.3), учитывая, что слева область ограничена дугой OA , на которой $x = y^2$, а справа – отрезком AB , на котором $x = 2 - y$:

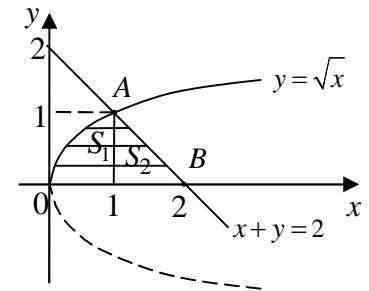


Рис. 14

$$m = \int_{(s)} \gamma dS = \iint_{(S)} y dx dy = \int_0^1 y dy \int_{y^2}^{2-y} dx = \int_0^1 y(2-y-y^2) dy = \int_0^1 (2y - y^2 - y^3) dy = \frac{5}{12}.$$

Для сравнения запишем двойной интеграл по формуле (2.2):

$$m = \iint_{(S)} \gamma dS = \iint_{(S_1)} y dx dy + \iint_{(S_2)} y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} y dy.$$

Результат будет тот же, но объём вычислений – больше, так как придется вычислить два интеграла вместо одного.

Примеры для самостоятельного решения

- 1) Вычислить массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$, если плотность $\gamma = 1$. Ответ. $e^2/4$.
- 2) Найти момент инерции относительно начала координат однородного треугольника, ограниченного прямыми $y = x$, $y = 2x$, $y = 2$. Ответ. $19\gamma/6$.

2.3. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат

В некоторых случаях двойной интеграл удобнее и проще вычислять не в прямоугольной, а в полярной системе координат.

Вспомним некоторые сведения о полярной системе координат. Полярная система состоит из полярной оси с началом координат в полюсе O . Положение точки P на плоскости характеризуется двумя полярными координатами ρ и φ , где ρ – длина радиус-вектора точки P , φ – угол наклона радиус-вектора к полярной оси (рис.15).

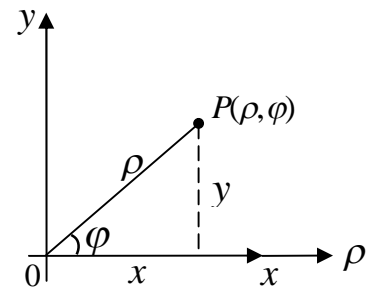


Рис. 15

Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рис.15. Тогда между прямоугольными координатами (x, y) точки P и её полярными координатами (ρ, φ) существует следующая связь (рис.15):

$$\boxed{x = \rho \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2.} \quad (2.4)$$

Перейдем к вычислению двойного интеграла в полярной системе координат. По определению имеем

$$\int_{(s)} f(P) dS = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k.$$

Если функция f непрерывна, то предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения фигуры на ячейки. Поэтому фигуру можно разбить на ячейки любым удобным способом. При вычислении интеграла в прямоугольной

системе координат было удобно разбить фигуру на ячейки координатными линиями прямоугольной системы, т.е. линиями $x = const$, $y = const$. В полярной системе координат удобно разбить фигуру на ячейки (рис.16) координатными линиями полярной системы, т.е. линиями $\rho = const$ (окружности с центром в полюсе 0), $\varphi = const$ (лучи, выходящие из полюса). Пусть разность между радиусами соседних окружностей постоянна и равна $\Delta\rho$; угол между соседними лучами постоянен и равен $\Delta\varphi$. Тогда площадь любой ячейки ΔS , кроме приграничной, можно вычислить по формуле $\Delta S \approx l_{\cup MP} \cdot |PK|$.

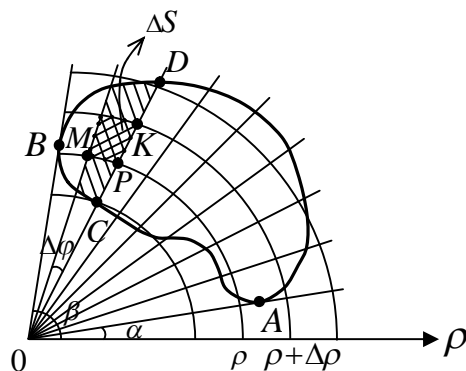


Рис. 16

Дуга MP окружности радиуса ρ опирается на центральный угол $\Delta\varphi$, поэтому $l_{\cup MP} = \rho \cdot \Delta\varphi$; $|PK| = \Delta\rho$. Значит $\Delta S \approx \rho \cdot \Delta\rho \cdot \Delta\varphi$. Поэтому

$$dS = \rho \, d\rho \, d\varphi, \quad \int_{(S)} f(P) \, dS = \iint_{(S)} f(\rho, \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi.$$

Пусть область (S) заключена (рис.17) между лучом OA с уравнением $\varphi = \alpha$ и лучом OB с уравнением $\varphi = \beta$ и ограничена дугой A_1B_1 с уравнением $\rho = \rho_1(\varphi)$ и дугой AB с уравнением $\rho = \rho_2(\varphi)$. Тогда имеет место формула

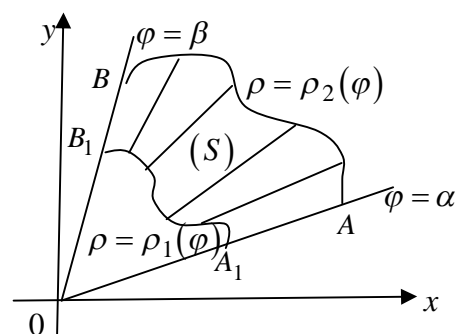


Рис.17

$$\int_{(S)} f(P) \, dS = \iint_{(S)} f(\rho, \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho, \varphi) \rho \, d\rho. \quad (2.5)$$

Нестрогое (физическое) обоснование формулы (2.5) для неотрицательной подынтегральной функции $f(P)$ аналогично данному в п.2.2.

Чтобы применять формулу (2.5) на практике рекомендуем:

- 1) построить область интегрирования;
- 2) в двойном интеграле $\int_{(S)} f(P) \, dS = \int_{(S)} f(x, y) \, dS$ заменить x, y, dS , на их выражения в полярной системе координат, т.е. $dS = \rho \, d\rho \, d\varphi$, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$;
- 3) записать получившийся двойной интеграл через повторный по формуле (2.5); в повторном интеграле **сначала** расставить **внутренние** пределы интегрирования, т.е. пределы изменения ρ . Для этого надо двигаться **по лучу**, выходящему из полюса (рис.16). При этом мы войдем в фигуру через линию, на которой $\rho = \rho_1(\varphi)$, а выйдем через линию, на которой $\rho = \rho_2(\varphi)$, т.е. переменная интегрирования ρ меняется от $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$;
- 4) расставить **внешние** пределы интегрирования, определив лучи $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, между которыми заключена фигура (внешние пределы всегда **числа**, а не функции);
- 5) вычислить сначала внутренний интеграл при постоянном φ , затем – внешний интеграл.

Полярной системой координат удобно пользоваться, когда область интегрирования есть круг (пример 2.5), или часть круга, или уравнение границы области имеет более простой вид при переходе к полярной системе (пример 2.6).

Пример 2.5. Найти момент инерции однородного круга (рис.18) радиуса R относительно центра.

Решение. Круг расположим в плоскости XOY с центром в начале координат. Момент инерции плоской фигуры вычислим с помощью двойного интеграла по формуле (1.10), учитывая, что $z = 0$ и для однородной фигуры $\gamma = const$. Тогда

$$I_0 = \int_{(S)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma dS = \gamma \int_{(S)} (x^2 + y^2) dS.$$

Так как область интегрирования есть круг, то двойной интеграл удобнее вычислять в полярной системе координат. Поэтому

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad dS = \rho d\rho d\varphi \quad \text{и} \quad I_0 = \gamma \iint_{(S)} \rho^3 d\rho d\varphi.$$

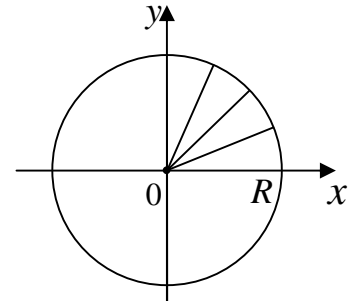


Рис. 18

Запишем двойной интеграл через повторный и расставим пределы интегрирования, учитывая, что для круга $0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ имеем $0 \leq \rho \leq R$:

$$I_0 = \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \gamma \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^R d\varphi = \frac{\gamma R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi \gamma R^4}{2}.$$

Пример 2.6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

Решение. Сначала построим линию, исследуя её уравнение. Выражение $(x^2 + y^2)^2$ неотрицательно, значит, и $2xy$ неотрицательно, т.е. линия находится в первой и третьей четвертях. Уравнение линии не изменится при замене x на $(-x)$ и y на $(-y)$. Значит, эта линия симметрична относительно начала координат и её достаточно построить сначала в первой четверти, а затем воспользоваться симметрией.

Наличие в уравнении линии выражения $x^2 + y^2$ наводит на мысль воспользоваться полярной системой координат, т.к. в этой системе выражение $x^2 + y^2$ имеет простой вид, а именно $x^2 + y^2 = \rho^2$. Используя формулы $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, запишем уравнение линии

$$\rho^4 = 2\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad \text{или} \quad \rho^2 = \sin 2\varphi, \quad \text{или} \quad \rho = \sqrt{\sin 2\varphi}.$$

Как отмечалось, достаточно сначала построить линию в первой четверти, т.е. для φ , принадлежащих отрезку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Для этого составим следующую таблицу:

φ	0	$\pi/8$	$2\pi/8 = \pi/4$	$3\pi/8$	$4\pi/8 = \pi/2$
ρ	0	$\approx 0,8$	1	$\approx 0,8$	0

Построим точки с вычисленными координатами (φ, ρ) , соединим их плавной линией, которую затем, воспользовавшись свойством симметрии, отобразим

зеркально относительно начала координат (рис.19). Вычислим площадь S_0 той части фигуры, которая расположена в первой четверти.:

$$S_0 = \int_{(S_0)} dS = \iint_{(S_0)} \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho.$$

Чтобы расставить внутренние пределы интегрирования, т.е. пределы изменения ρ , будем двигаться в области (S_0) по лучам, выходящим из полюса. На каждом таком луче ρ меняется от значения $\rho = 0$ в точке O до значения $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$ на линии, ограничивающей область (S_0) . Кроме того, эта область заключена меж-

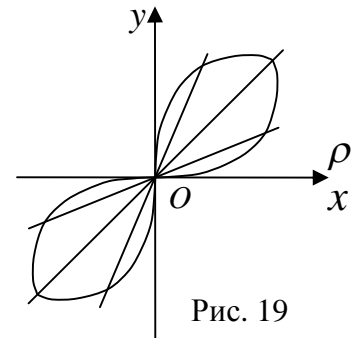


Рис. 19

ду лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Поэтому $S_0 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho$.

Теперь вычислим повторный интеграл, начиная с вычисления внутреннего интеграла

$$S_0 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{4} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}; \quad S = 2S_0 = 1.$$

Примеры для самостоятельного решения

1) Найти моменты инерции однородного круга радиуса R относительно центра и диаметра, если плотность $\gamma = 1$. *Ответ.* $I_0 = \frac{\pi R^2}{2}, \quad I_d = I_{Ox} = \frac{\pi R^2}{2}$.

2) Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 1 + \cos \varphi$. *Ответ.* $S = \frac{3\pi}{2}$

3) Найти массу фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = 0$ ($y \geq 0$), если плотность $\gamma = y$. *Ответ.* $m = \frac{14}{3}$.

2.4. Вычисление тройного интеграла

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению определенного и двойного интегралов. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть тело (V) ограничено поверхностями $z = z_1(x, y), \quad z = z_2(x, y)$, цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ (рис.20а). Цилиндрическая поверхность может и отсутствовать (рис.20б). Тогда

$$\boxed{\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{(V_{xy})} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.} \quad (2.6)$$

Здесь (V_{xy}) – есть проекция тела (V) на плоскости XOY (рис.20).

Обоснование формулы (2.6) не входит в программу. Отметим, что оно проводится так же, как и для двойного интеграла.

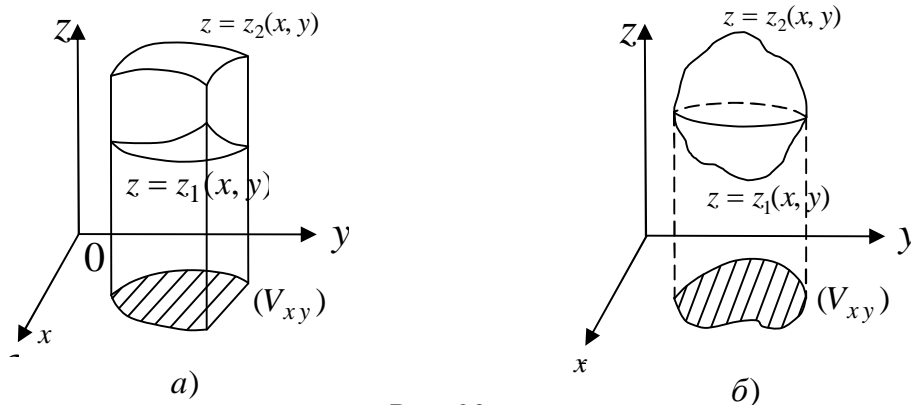


Рис. 20

Чтобы применять формулу (2.6) на практике рекомендуем:

- 1) построить тело (V);
- 2) записать тройной интеграл через повторный интеграл; в повторном интеграле **сначала** расставить **внутренние** пределы интегрирования, т.е. пределы изменения z . Для этого надо двигаться параллельно оси OZ . При этом мы войдем в тело через поверхность, на которой $z = z_1(x, y)$, а выйдем через поверхность, на которой $z = z_2(x, y)$. Таким образом, переменная интегрирования z меняется от $z_1(x, y)$ до $z_2(x, y)$;
- 3) вычислить внутренний интеграл при фиксированных x, y ;
- 4) вычислить внешний интеграл по проекции тела (V) на плоскость XOY .

Случай 2. Пусть тело (V) ограничено поверхностями $y = y_1(x, z)$, $y = y_2(x, z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OY . Тогда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{(V_{xz})} dx dz \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \quad (2.7)$$

Случай 3. Пусть тело (V) ограничено поверхностями $x = x_1(y, z)$, $x = x_2(y, z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OX . Тогда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{(V_{yz})} dy dz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \quad (2.8)$$

Указания к применению формулы (2.6) с очевидными изменениями переносятся и на формулы (2.7), (2.8).

Для вычисления тройных интегралов надо уметь строить поверхности с заданными уравнениями и тела, ограниченные ими. Дадим следующие рекомендации.

1. Если уравнение поверхности не содержит одной переменной (например, уравнение $F(x, y) = 0$ не содержит z), то поверхность является цилиндрической (с образующими, параллельными оси OZ). Сначала строим направляющую с заданным уравнением $F(x, y) = 0$, затем через её точки проводим образующие, параллельные оси OZ (пример 2.7).

2. Если уравнение поверхности содержит все переменные, то удобно строить поверхность методом сечения плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ или параллельными им плоскостями.

Пример 2.7. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $y = -\sqrt{x}$, $y = 0$, $x + z = 3$, $x + 3z = 3$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие тело. В уравнении $y = -\sqrt{x}$ отсутствует z , следовательно, это уравнение определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ . Направляющая в плоскости XOY имеет уравнение $y = -\sqrt{x}$ (или $y^2 = x$, $y \leq 0$), которое определяет левую часть параболы. Строя направляющую и образующие, проходящие через её точки (рис.21), получим цилиндрическую поверхность (σ_1) . Уравнение $y = 0$ определяет плоскость XOZ .

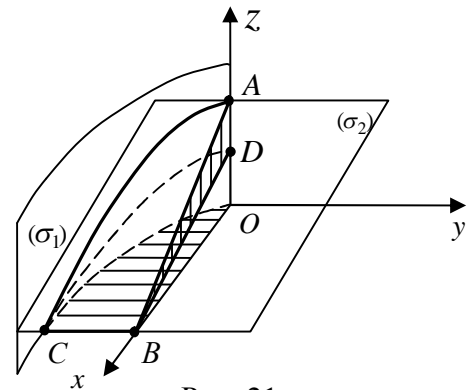


Рис. 21

Следующее уравнение $x + z = 3$ есть уравнение первой степени, значит, оно определяет плоскость. В уравнении отсутствует y , значит, плоскость параллельна оси OY . Кроме того, при $x = 0$ имеем $z = 3$, при $z = 0$ имеем $x = 3$. Через полученные две точки A и B проводим плоскость (σ_2) , параллельную оси OY . Эта плоскость пересечет плоскость XOZ по отрезку AB , а цилиндрическую поверхность – по дуге AC .

Аналогично, уравнение $x + 3z = 3$ определяет плоскость, параллельную оси OY , пересекающую плоскость XOZ по отрезку BD , а цилиндрическую поверхность – по дуге DC .

Объём тела, ограниченного рассмотренными поверхностями, найдем по одной из формул (1.3):

$$V = \int_{(V)} dV = \iiint_{(V)} dx dy dz.$$

Запишем тройной интеграл через повторный по формуле (2.6). Чтобы расставить внутренние пределы интегрирования, т.е. пределы изменения z , будем двигаться параллельно оси OZ . При этом мы войдем в тело через часть BDC плоскости, на которой $x + 3z = 3$ или $z = 1 - \frac{x}{3}$, а выйдем через часть ABC другой плоскости, на которой $x + z = 3$ или $z = x - 3$. Поэтому

$$V = \int_{(V_{xy})} dx dy \int_{1-x/3}^{3-x} dz = \iint_{(V_{xy})} [(3-x) - (1-x/3)] dx dy = \iint_{(V_{xy})} (2 - \frac{2}{3}x) dx dy.$$

Здесь (V_{xy}) есть проекция тела (V) на плоскость XOY , т.е. криволинейный треугольник OBC . Вычислим теперь двойной интеграл. Для этого запишем его через повторный интеграл с внутренним интегрированием по y . Для выяснения пределов изменения y двигаемся в области OBC параллельно оси OY . При этом войдем в область через дугу OC , на которой $y = -\sqrt{x}$, а выйдем через отрезок OB , на котором $y = 0$. Поэтому

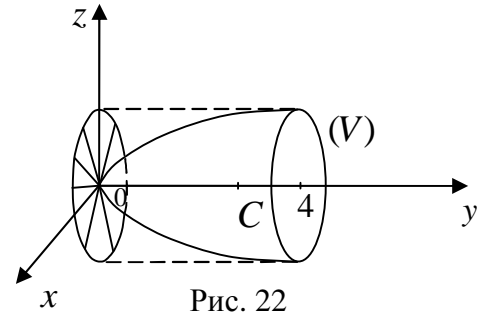
$$V = \int_0^3 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 \left(2 - \frac{2}{3}x\right) dy.$$

Вычисляя сначала внутренний интеграл при фиксированном x , а затем внешний интеграл, получим

$$V = \int_0^3 \left(2 - \frac{2}{3}x\right) \sqrt{x} dx = \left(2 \cdot x^{3/2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot x^{5/2} \cdot \frac{2}{5}\right) \Big|_0^3 = \frac{8\sqrt{3}}{5}.$$

Пример 2.8. Найти центр тяжести тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = y$, $y = 4$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие тело. Первую поверхность с уравнением $x^2 + z^2 = y$ строим методом сечений. В сечении плоскостью $x = 0$ получаем параболу $z^2 = y$ с осью симметрии – осью OY (рис.22). В сечении плоскостью $y = 4$ получаем окружность $x^2 + z^2 = 4$. Уже из этих сечений видно, что уравнение $x^2 + z^2 = y$ определяет параболоид. Вторая поверхность – плоскость $y = 4$ – отсекает от параболоида его часть, изображенную на рис.22.



Центр тяжести полученного однородного тела, в силу его симметрии, находится на оси OY (в точке C). Следовательно, $x_c = z_c = 0$. Координату y_c центра тяжести **тела** найдем с помощью **тройных** интегралов по формулам (1.6) и (1.4):

$$y_c = \frac{1}{m} \int_{(V)} y \cdot \gamma dV, \quad \text{где } m = \int_{(V)} \gamma dV.$$

Так как тело однородное, то его плотность γ является постоянной величиной и её можно вынести за знак интеграла. Поэтому

$$y_c = \frac{\gamma \int_{(V)} y dV}{\gamma \int_{(V)} dV} = \frac{\int_{(V)} y dV}{\int_{(V)} dV} = \frac{I_1}{I_2}.$$

Вычислим сначала интеграл I_1 , стоящий в числителе; для этого запишем его в виде повторного интеграла с внутренним интегрированием по y . Для выяснения пределов изменения y двигаемся параллельно оси OY . При этом мы входим в тело через поверхность параболоида, на которой $y = x^2 + z^2$, а выходим – через плоскость, на которой $y = 4$. Поэтому

$$I_1 = \int_{(V)} y dV = \iiint_{(V)} y dx dy dz = \iint_{(V_{xz})} dx dz \int_{x^2+z^2}^4 y dy.$$

Сначала вычислим внутренний интеграл

$$I_1 = \iint_{(V_{xz})} dx dz \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2+z^2}^4 = \frac{1}{2} \iint_{(V_{xz})} [16 - (x^2 + z^2)^2] dx dz.$$

Так как проекция (V_{xz}) тела (V) на плоскости XOZ есть круг, то получившийся двойной интеграл удобно вычислять в полярной системе координат, заменяя $x^2 + z^2$ на ρ^2 , а $dx dz = dS$ на $\rho d\rho d\varphi$. Тогда получим

$$I_1 = \frac{1}{2} \iint_{(V_{xz})} [16 - \rho^2] \rho d\rho d\varphi.$$

Двойной интеграл запишем через повторный интеграл с внутренним интегрированием по ρ . Для выяснения пределов изменения ρ двигаемся в круге (V_{xz}) по лучам, выходящим из полюса. При этом (рис.22) ρ меняется от нуля в т.О до значения ρ на окружности, т.е. до радиуса окружности, получающейся от сечения параболоида $x^2 + z^2 = y$ плоскостью $y = 4$, т.е. окружности $x^2 + z^2 = 4$ радиуса 2. Итак, ρ меняется от 0 до 2; φ меняется от 0 до 2π и, следовательно, получим

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (16 - \rho^4) \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(8\rho^2 - \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{64\pi}{3}.$$

Аналогично вычисляется интеграл I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{(V)} dV = \iiint_{(V)} dx dy dz = \iint_{(V_{xz})} dx dz \int_{x^2+z^2}^4 dy = \iint_{(V_{xz})} [4 - (x^2 + z^2)] dx dz = \\ &= \iint_{(V_{xz})} [4 - \rho^2] \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4 - \rho^2) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 8\pi. \end{aligned}$$

Таким образом, $y_c = \frac{I_1}{I_2} = \frac{8}{3}$ и центр тяжести данного тела находится в точке $C(0, 8/3, 0)$.

Примеры для самостоятельного решения

- 1). Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $y + z = 2$, $y = x^2$.
- 2). Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $z = 3 - x^2 - y^2$, $z = 0$, если плотность $\gamma = 2$.
- 3). Вычислить момент инерции относительно оси OZ однородного тела, ограниченного поверхностями $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 2$.

Ответы. 1) $\frac{32\sqrt{2}}{15}$, 2) 9π , 3) $\frac{16\pi\gamma}{5}$.

2.5. Вычисление поверхностного интеграла 1 рода

Вычисление поверхностного интеграла 1 рода $\int_{(\sigma)} f(P) d\sigma$ сводится к вычислению двойного интеграла. Рассмотрим 3 случая.

Случай 1. Пусть (σ) — гладкая поверхность с уравнением, разрешенным относительно z : $z = z(x, y)$.

Чтобы вычислить поверхностный интеграл $\int_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma$, нужно

- 1) в подынтегральной функции подставить вместо z его значение $z(x, y)$ на поверхности (σ) ,
- 2) заменить элемент площади $d\sigma$ на выражение $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy$,
- 3) вычислить получившийся двойной интеграл по проекции (σ_{xy}) поверхности (σ) на плоскость XOY .

Таким образом, имеют место следующие формулы:

$$\boxed{\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy; \\ \int_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma &= \iint_{(\sigma_{xy})} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy. \end{aligned}} \quad (2.9)$$

Обоснование этих формул в программу не входит.

Случай 2. Пусть (σ) — гладкая поверхность с уравнением, разрешенным относительно x : $x = x(y, z)$. Тогда

$$\boxed{\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2} dy dz; \\ \int_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma &= \iint_{(\sigma_{yz})} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2} dy dz. \end{aligned}} \quad (2.10)$$

Здесь (σ_{yz}) есть проекция поверхности (σ) на плоскость YOZ .

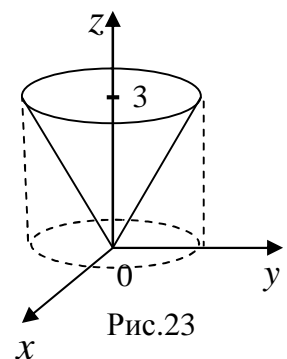
Случай 3. Пусть (σ) — гладкая поверхность с уравнением, разрешенным относительно y : $y = y(x, z)$. Тогда

$$\boxed{\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2} dx dz; \\ \int_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma &= \iint_{(\sigma_{xz})} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2} dx dz. \end{aligned}} \quad (2.11)$$

Здесь (σ_{xz}) есть проекция поверхности (σ) на плоскость XOZ .

Пример 2.9. Найти массу однородной поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $(0 \leq z \leq 3)$, если $\gamma = z$.

Решение. Построим поверхность $x^2 + y^2 = z^2$ методом сечений. В сечении $x = 0$ получаем $y^2 = z^2$ или $y = \pm z$. Это — пара прямых в плоскости YOZ (рис.23). В сечении $z = 3$ получаем окружность $x^2 + y^2 = 3^2$. Таким образом, уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ определяет коническую поверхность. Массу **поверхности** найдем с помощью **поверхностного** интеграла:



$$m = \int_{(\sigma)} \gamma d\sigma = \int_{(\sigma)} z d\sigma.$$

Для вычисления этого интеграла уравнение поверхности удобно разрешить относительно z : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Теперь нужно найти z'_x , z'_y и затем $d\sigma$ по формуле (2.9):

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

Вычислим $\int_{(\sigma)} z d\sigma$, подставляя значение z на поверхности ($z = \sqrt{x^2+y^2}$) и значение $d\sigma = \sqrt{2} dx dy$:

$$m = \int_{(\sigma)} z d\sigma = \iint_{(\sigma_{xy})} \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{2} dx dy.$$

Здесь (σ_{xy}) есть проекция конической поверхности (σ) на плоскость XOY , т.е. круг радиуса 3 (рис.23). Двойной интеграл по кругу удобнее вычислять в полярной системе координат. Для этого заменим x^2+y^2 на ρ^2 , $dx dy$ на $\rho d\rho d\varphi$. Получим

$$m = \sqrt{2} \iint_{(\sigma_{xy})} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \sqrt{2} \iint_{(\sigma_{xy})} \rho^2 d\rho d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^2 d\rho = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^3 d\varphi = 18\pi \sqrt{2}.$$

Пример 2.10. Найти момент инерции относительно начала координат полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, ($z \geq 0$), если плотность $\gamma = z$.

Решение. Момент инерции относительно начала координат **поверхности** найдем с помощью **поверхностного** интеграла по второй из формул (1.10):

$$I_0 = \int_{(\sigma)} (x^2+y^2+z^2) \gamma d\sigma.$$

На поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $\gamma = z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, Поэтому

$$I_0 = \int_{(\sigma)} R^2 \cdot \sqrt{R^2-x^2-y^2} d\sigma.$$

Для вычисления этого интеграла разрешим уравнение поверхности относительно z , найдем z'_x , z'_y и затем $d\sigma$ по формуле (2.9)::

$$z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}, \quad z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}} dx dy = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Подставляя выражение для $d\sigma$ в интеграл, получим

$$I_0 = \int_{(\sigma)} R^2 \cdot \sqrt{R^2-x^2-y^2} d\sigma = R^2 \iint_{(\sigma_{xy})} \sqrt{R^2-x^2-y^2} \cdot \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = R^3 \iint_{(\sigma_{xy})} dx dy.$$

Проекция (σ_{xy}) полусферы на плоскость XOY есть круг радиуса R , а интеграл

$\iint_{(\sigma_{xy})} dx dy$ равен площади πR^2 этого круга. Поэтому

$$I_0 = R^3 \iint_{(\sigma_{xy})} dx dy = R^3 \cdot \pi R^2 = \pi R^5.$$

Примеры для самостоятельного решения

- 1) Вычислить площадь части поверхности $z = x^2 + y^2$, отсекаемой плоскостью $z = 2$.
- 2) Вычислить массу части плоскости $2x + y + z = 2$, расположенной в первом октанте, если плотность $\gamma = x$.

Ответы. 1) $13\pi/3$, 2) $\sqrt{6}/3$.

Глава 2. Теория поля

3. Скалярное поле

Скалярное поле – это область пространства, в которой задана скалярная функция $f(x, y, z)$, называемая функцией поля. Например, это может быть поле температур, поле давлений и т.д.

Множество точек поля, в которых функция поля $f(x, y, z)$ принимает постоянное значение c , образуют поверхность с уравнением $f(x, y, z) = c$, называемую **поверхностью уровня** поля. Если скалярное поле плоское, например, находится в плоскости XOY , то его функция поля $f(x, y)$ зависит от двух переменных x и y , а множество точек, в которых $f(x, y) = c$ образуют **линию уровня**. Линии уровня используются при составлении географических карт (для изображения точек, расположенных на одинаковой высоте над уровнем моря), при составлении метеорологических карт (для изображения линий одинаковых температур – изотерм и линий одинакового давления – изобар).

3.1. Производная поля по направлению

Для характеристики скорости изменения поля $f(x, y, z)$ в направлении вектора \vec{l} введем понятие производной поля по направлению. Пусть задана точка M и вектор \vec{l} , выходящий из точки M (рис.24). Рассмотрим точку M_1 , лежащую на векторе \vec{l} , и величину $f(M_1) - f(M) = \Delta f(M)$ – приращение функции поля $f(M)$ в точке M в направлении \vec{l} .

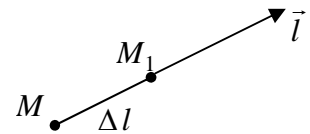


Рис.24

Определение. Производной поля $f(M)$ в точке M в направлении \vec{l} называют величину

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta f(M)}{\Delta l} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{f(M_1) - f(M)}{|M_1 M|}.$$

Свойства производной по направлению

- 1). $\frac{\partial f}{\partial l}(M)$ есть скорость изменения функции $f(M)$ в точке M в направлении \vec{l} .
- 2). Поле $f(M)$ в точке M в направлении \vec{l} возрастает тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial l}(M) \geq 0$.
- 3). Поле $f(M)$ в точке M в направлении \vec{l} убывает тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial l}(M) \leq 0$.

Действительно, 1) $\Delta f(M)$ есть изменение функции $f(M)$ на участке MM_1 ,

$\frac{\Delta f(M)}{\Delta l}$ есть средняя скорость изменения функции $f(M)$ на участке MM_1 ,

$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta f(M)}{\Delta l}$ есть скорость изменения функции $f(M)$ в точке M в направлении \vec{l} ;

2) в направлении \vec{l} поле $f(M)$ возрастает \Leftrightarrow

$$f(M_1) > f(M) \Leftrightarrow \frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial l}(M) \geq 0;$$

3) свойство 3) проверяется также как свойство 2).

Формула для вычисления производной по направлению

Пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ – дифференцируема в точке $M(x, y, z)$. Тогда

$$\Delta f(M) = f'_x(M) \Delta x + f'_y(M) \Delta y + f'_z(M) \Delta z + o(\rho), \quad (3.1)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \Delta l$ и $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{o(\Delta l)}{\Delta l} = 0$.

Поделим равенство (3.1) на Δl :

$$\frac{\Delta f(M)}{\Delta l} = f'_x(M) \frac{\Delta x}{\Delta l} + f'_y(M) \frac{\Delta y}{\Delta l} + f'_z(M) \frac{\Delta z}{\Delta l} + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим вектор $\text{grad } f(M) = \{f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)\}$, называемый **градиентом поля** $f(M)$, и вектор $\vec{l}_0 = \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta l}, \frac{\Delta y}{\Delta l}, \frac{\Delta z}{\Delta l} \right\}$, равный единичному вектору направления \vec{l} .

Тогда равенство (3.2) можно записать в виде

$$\frac{\Delta f(M)}{\Delta l} = \text{grad } f(M) \cdot \vec{l}_0 + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l},$$

где первое слагаемое есть скалярное произведение двух векторов: $\text{grad } f(M)$ и \vec{l}_0 .

В пределе при Δl стремящемся к нулю получим:

$$\boxed{\frac{\partial f(M)}{\partial l} = \text{grad } f(M) \cdot \vec{l}_0}, \quad (3.3)$$

где $\text{grad } f(M) = \{f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)\}$ – градиент скалярного поля $f(M)$, $\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ – единичный вектор направления \vec{l} .

3.2. Градиент поля и его свойства

Вектор $\text{grad } f(M) = \{f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)\}$ является важной характеристикой скалярного поля. Отметим ряд свойств градиента.

1. Скалярное поле $f(M)$ в точке M_0 быстрее всего возрастает в направлении вектора $\text{grad } f(M_0)$ со скоростью равной $|\text{grad } f(M_0)|$.
2. Скалярное поле $f(M)$ в точке M_0 быстрее всего убывает в направлении противоположном вектору $\text{grad } f(M_0)$ со скоростью равной $|\text{grad } f(M_0)|$.
3. Вектор $\text{grad } f(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проходящей через точку M_0 .

Действительно из формулы (3.3) и определения скалярного произведения следует, что

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \text{grad } f(M_0) \cdot \vec{l}_0 = |\text{grad } f(M_0)| \cdot |\vec{l}_0| \cdot \cos \varphi,$$

где φ — угол между векторами $\text{grad } f(M_0)$ и \vec{l} . Так как длина единичного вектора \vec{l}_0 равна единице, то

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = |\text{grad } f(M_0)| \cdot \cos \varphi.$$

Поэтому $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, равное $|\text{grad } f(M_0)|$, когда $\cos \varphi = 1$, то есть угол φ между векторами $\text{grad } f(M_0)$ и \vec{l} равен нулю и $\text{grad } f(M_0) \uparrow \vec{l}$.

Производная $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ будет принимать минимальное значение, когда $\cos \varphi = -1$, т.е. угол $\varphi = \pi$ и $\text{grad } f(M_0) \uparrow \downarrow \vec{l}$.

Поверхность уровня поля $f(x, y, z)$ имеет уравнение $f(x, y, z) = c$. Нормальный вектор этой поверхности $\vec{N} = \{f'_x; f'_y; f'_z\}_{M_0}$ совпадает с $\text{grad } f(M_0)$. Значит, вектор $\text{grad } f(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проведенной в точке M_0 .

Пример 3.1. Для поля $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ найти

- а) производную поля f в точке M_0 в направлении вектора $\overline{M_0M}$, где $M_0(1,0,1)$, $M(3,1,2)$,
 б) наибольшую скорость возрастания поля $f(M)$ в точке M_0 .

Решение. а). Найдем вектор $\overline{M_0M}$, единичный вектор направления \vec{l}_0 и $\text{grad } f(M_0)$:

$$\overline{M_0M} = \{2, 1, 1\}, \quad \vec{l}_0 = \frac{\overline{M_0M}}{|\overline{M_0M}|} = \frac{\{2, 1, 1\}}{\sqrt{6}},$$

$$\text{grad } f(M_0) = \{f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)\} = \{2x, 2y, 2z\}_{M=M_0} = \{2, 0, 2\}.$$

Теперь воспользуемся формулой (3.3):

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \text{grad } f(M) \cdot \vec{l}_0 = \frac{\{2, 0, 2\} \cdot \{2, 1, 1\}}{\sqrt{6}} = \frac{(2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1)}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Так как $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} > 0$, то поле в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l} = \overline{M_0M}$ возрастает, причем со скоростью равной $\sqrt{6}$.

б). Наибольшая скорость возрастания поля $f(M)$ в точке M_0 равна

$$|\text{grad } f(M_0)| = \sqrt{2^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Для поля $f(M) = x^2 + y^2 - 3x + 2y - z^3$ найти

- а) максимальную скорость возрастания поля в точке $M_0(0,0,0)$,
 б) направление наиболее быстрого убывания поля в точке M_0 ,
 в) скорость изменения поля в точке M_0 в направлении идущем от точки

M_0 к точке $M(3,4,0)$.

Ответ. а) $\sqrt{13}$, б) $\vec{l} = \{3, -2, 0\}$, в) $-\frac{1}{5}$.

2. Найти производную поля $f(M) = xy^2 + z^2 - xyz$ в точке $M(1,1,2)$ в направлении образующем с осями координат углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. Ответ: 1.

Указание. Единичный вектор направления имеет координаты $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$.

4. Понятие векторного поля. Векторные линии

Векторное поле – это область пространства, в каждой точке M которой задан вектор $\vec{a}(M)$.

Пример 4.1. Пусть на материальную точку в области D действует сила $\vec{F}(M)$. Тогда в области D определено векторное поле $\vec{F}(M)$.

Пример 4.2. Пусть в области D происходит течение жидкости и в каждой точке M задан вектор $\vec{v}(M)$ скорости частицы жидкости. Тогда в области D определено векторное поле скоростей жидкости.

Пример 4.3. Поместим заряд $+q$ в начало координат. Тогда сила, с которой этот заряд действует на единичный положительный заряд, помещенный в точку M , определяется по закону Кулона: $\vec{E} = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$, где \vec{r} – вектор, идущий от начала координат в точку M (радиус-вектор точки M), а r – его длина. Имеем векторное поле напряженностей $\vec{E}(M)$, создаваемое зарядом q .

Мы будем рассматривать только стационарные поля, для которых вектор поля $\vec{a}(M)$ зависит от точки M и не зависит от времени. Проекции вектора $\vec{a}(M)$ на оси координат обозначим $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$. Тогда

$$\vec{a}(M) = P(M) \vec{i} + Q(M) \vec{j} + R(M) \vec{k}.$$

Далее всюду предполагаем, что функции P , Q , R непрерывны вместе со своими частными производными, если не оговорено противное.

Одной из характеристик векторного поля являются векторные линии.

Определение. Векторной линией векторного поля называется линия, в каждой точке которой касательный вектор коллинеарен вектору поля (рис. 25).

Векторные линии в конкретных полях имеют ясный физический смысл. В поле скоростей текущей жидкости векторные линии – это линии тока этой жидкости, т. е. линии, по которым движутся частицы жидкости.

В электрическом поле векторные линии – это силовые линии и их расположение очень важно в физике.

Выведем уравнения векторных линий для поля $\vec{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ (для краткости аргументы функций P , Q , R не выписаны).

Пусть уравнение векторной линии задано в параметрическом виде

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Касательным вектором этой линии является вектор $\vec{r}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$ и вектор $\vec{r}'(t) dt = \{x'(t) dt, y'(t) dt, z'(t) dt\} = \{dx, dy, dz\}$.

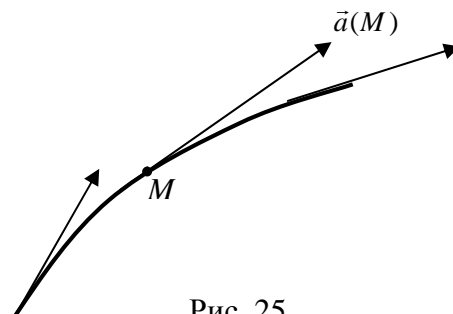


Рис. 25

По определению векторной линии ее касательный вектор $\vec{r}'(t)dt$ и вектор поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ коллинеарны. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны,

$$\boxed{\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}}. \quad (4.1)$$

Мы получили систему дифференциальных уравнений для отыскания векторных линий поля \vec{a} . Как решается такая система, покажем на примерах 4.4 и 4.5.

Пример 4.4. Магнитное поле $\vec{H}(M)$ создано электрическим током силы J , текущим по бесконечно длинному прямому проводу l . Найти силовые линии поля.

Решение. Если провод l принять за ось Oz некоторой декартовой системы координат, то, как известно из теории электричества,

$$\vec{H}(M) = 2J \cdot \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}.$$

Запишем уравнения векторных линий для поля $\vec{H}(M)$:

$$\frac{dx}{-2J \frac{y}{x^2 + y^2}} = \frac{dy}{2J \frac{x}{x^2 + y^2}} = \frac{dz}{0} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, \quad dz = 0.$$

Из первого уравнения имеем: $x dx = -y dy$, $\int x dx = -\int y dy$, $x^2 = -y^2 + C$. Из второго уравнения $z = h$. Таким образом, силовые линии поля $\vec{H}(M)$ есть окружности $x^2 + y^2 = C$, расположенные в плоскостях $z = h$, параллельных плоскости XOY .

Пример 4.5. Найти векторные линии поля $\vec{a} = z\vec{i} + (z-x)^2\vec{j} + x\vec{k}$.

Решение. Учитывая, что $P = z$, $Q = (z-x)^2$, $R = x$, запишем систему (4.1):

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{(z-x)^2} = \frac{dz}{x}.$$

В одном из уравнений этой системы $\frac{dx}{z} = \frac{dz}{x}$ разделим переменные $x dx = z dz$ и проинтегрируем $\int x dx = \int z dz$. Получим

$$\frac{x^2}{2} = \frac{z^2}{2} + \frac{c_1}{2} \quad \text{или} \quad x^2 - z^2 = C_1.$$

Чтобы решить другое уравнение системы воспользуемся известным свойством пропорций: если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d}$. В нашем примере удобно взять $\lambda = 1$, $\mu = -1$ и записать систему уравнений следующим образом:

$$\frac{dy}{(z-x)^2} = \frac{dx}{z} = \frac{dz}{x} = \frac{dx - dz}{z-x} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{(z-x)^2} = \frac{-d(z-x)}{(z-x)}.$$

Теперь разделим переменные $dy = -(z-x)d(z-x)$ и проинтегрируем

$$\int dy = -\int (z-x)d(z-x).$$

Получим $y = -\frac{(z-x)^2}{2} + C_2$. Таким образом, векторные линии данного поля есть

линии пересечения поверхностей $x^2 - z^2 = C_1$ и $y = -\frac{(z-x)^2}{2} + C_2$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти векторные линии поля: 1) $\vec{a} = (1+z)\vec{i} + y\vec{j} + (x-1)\vec{k}$; 2) $\vec{a} = \frac{\vec{i}}{x-3} + \frac{\vec{j}}{y+4} - \frac{\vec{k}}{z+9}$.

Ответы: 1) $\begin{cases} (x-1)^2 - (z+1)^2 = C_1, \\ y = C_2(x+z); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-3)^2 - (y+4)^2 = C_1, \\ (y+4)^2 + (z+9)^2 = C_2. \end{cases}$

5. Поток векторного поля

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать так называемую ориентированную поверхность, т. е. поверхность, в каждой точке которой выбрано направление нормали с помощью единичного вектора $\vec{n}(M)$, причем $\vec{n}(M)$ является непрерывной вектор-функцией точки M (рис. 26).

Изменение направления нормалей на противоположное будем называть изменением ориентации поверхности.

Рассмотрим физическую задачу о потоке жидкости, приводящую к понятию потока поля.

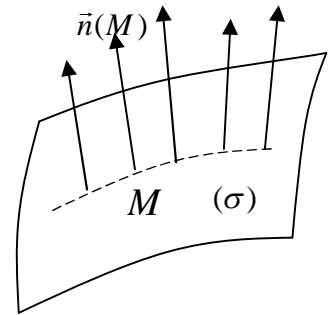


Рис. 26

5.1. Задача о количестве жидкости

Пусть в некоторой части пространства течет жидкость, причем скорость частицы жидкости зависит только от точки, через которую перетекает жидкость, и не зависит от времени, т. е. $\vec{v} = \vec{v}(M)$. Требуется вычислить количество (объем) жидкости Π_σ , протекающее в единицу времени через ориентированную поверхность (σ) в выбранном направлении (предполагается, что жидкость может свободно протекать через эту поверхность).

Рассмотрим сначала простейший случай. Пусть (σ) — плоская площадка с нормальным вектором \vec{n} , а скорость течения жидкости \vec{v} во всех точках одна и та же. Тогда количество жидкости, протекающее через эту площадку в единицу времени, равно (рис. 27) объему цилиндра с основанием σ и образующей $|\vec{v}|$. Так как высота этого цилиндра равна $|\text{пр}_{\vec{n}} \vec{v}| = |\vec{v} \cdot \vec{n}|$, то его объем равен $|\vec{v} \cdot \vec{n}| \cdot \sigma$. Эта величина и равна количеству жидкости, протекающей через (σ) .

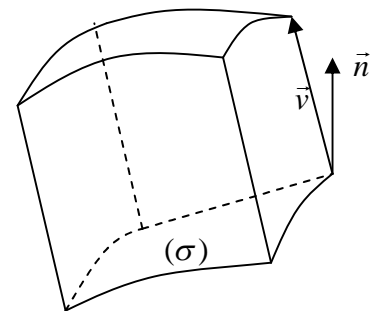


Рис. 27

Опустив знак абсолютной величины, мы получим величину $(\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot \sigma$, которую называют потоком жидкости через (σ) . Если угол между векторами \vec{v} и \vec{n} — острый, то говорят, что жидкость течет в направлении вектора \vec{n} ; в этом случае $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$ и поток совпадает с количеством жидкости. Если угол между векторами \vec{v} и \vec{n} тупой, то говорят, что жидкость течет в направлении, противоположном вектору \vec{n} ; в этом случае $\vec{v} \cdot \vec{n} < 0$ и поток отличается от количества жидкости знаком. Если векторы \vec{v} и \vec{n} перпендикулярны, то жидкость течет вдоль площадки (σ) и поток равен нулю.

Перейдем теперь к общему случаю. Для вычисления потока жидкости через произвольную поверхность (σ) разобьем эту поверхность на n частей ($\Delta\sigma_1, \dots, \Delta\sigma_n$) с площадями $\Delta\sigma_1, \dots, \Delta\sigma_n$ (рис. 28). На каждой площадке ($\Delta\sigma_k$) выберем произвольную точку M_k . Будем приближенно считать, что все частицы, протекающие через малую площадку ($\Delta\sigma_k$), имеют одинаковые скорости $\vec{v} \approx \vec{v}(M_k)$, а площадку будем считать плоской и перпендикулярной нормальному вектору $\vec{n}(M_k)$. Тогда поток жидкости через площадку ($\Delta\sigma_k$) приближенно равен:

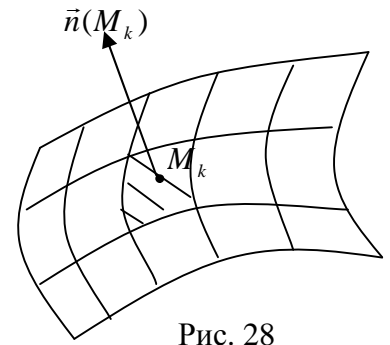


Рис. 28

$$\Pi_{\Delta\sigma_k} \approx (\vec{v}(M_k) \cdot \vec{n}(M_k)) \cdot \Delta\sigma_k.$$

Вычислим поток через всю поверхность:

$$\Pi_{\sigma} = \sum_{k=1}^n \Pi_{\Delta\sigma_k} \approx \sum_{k=1}^n (\vec{v}(M_k) \cdot \vec{n}(M_k)) \cdot \Delta\sigma_k.$$

Это приближенное равенство будет тем точнее, чем меньше $d = \max\{\Delta\sigma_1, \dots, \Delta\sigma_n\}$. Точное значение потока определяется как предел этой суммы при $d \rightarrow 0$:

$$\Pi_{\sigma} = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\vec{v}(M_k) \cdot \vec{n}(M_k)) \cdot \Delta\sigma_k.$$

Но полученный предел равен поверхностному интегралу I рода от скалярной функции $\vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M)$. Таким образом, поток жидкости через поверхность (σ) вычисляется по формуле

$$\Pi_{\sigma} = \int_{(\sigma)} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\sigma. \quad (5.1)$$

Отметим, что

- 1) если суммарный поток $\Pi_{\sigma} > 0$, то количество жидкости, протекающей в направлении нормали \vec{n} , больше количества жидкости, протекающей в направлении $-\vec{n}$;
- 2) если суммарный поток $\Pi_{\sigma} < 0$, то количество жидкости, протекающей в направлении нормали \vec{n} , меньше количества жидкости, протекающей в направлении $-\vec{n}$;
- 3) если $\Pi_{\sigma} = 0$, то количества жидкости, протекающей в том и другом направлениях, одинаковы.

Интеграл в формуле (5.1) является поверхностным интегралом I рода от скалярной функции $\vec{v} \cdot \vec{n}$. Его также называют поверхностным интегралом II рода от вектор-функции \vec{v} . Аналогичным образом определяют поток и для произвольного векторного поля \vec{a} .

5.2. Понятие потока и его вычисление

Определение. Поток векторного поля \vec{a} через ориентированную поверхность (σ) называется величина:

$$\Pi_{\sigma} = \int_{(\sigma)} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma, \quad (5.2)$$

где \vec{n} — единичный нормальный вектор поверхности (σ).

Отметим, что при изменении ориентации поверхности вектор \vec{n} заменяется на вектор $(-\vec{n})$ и, следовательно поток меняет знак.

Пример 5.1. Заряд q помещен в начало координат и создает поле напряженностей $\vec{E} = \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r}$ (пример 4.3). Вычислить поток этого поля через поверхность сферы радиуса R с центром в начале координат с нормальным вектором, направленным от начала координат.

Решение. Поток поля \vec{E} вычисляется по формуле: $\Pi = \int_{(\sigma)} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma$. Так как еди-

ничный вектор нормали \vec{n} к сфере коллинеарен радиус-вектору \vec{r} , то $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$. То-

гда $\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{r^4} \cdot r^2 = \frac{q}{r^2}$. На поверхности сферы $r = R$, $\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{q}{R^2}$; площадь поверхности сферы $\sigma = 4\pi R^2$. Поэтому

$$\Pi = \int_{(\sigma)} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \frac{q}{R^2} \int_{(\sigma)} d\sigma = \frac{q}{R^2} \sigma = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q .$$

Заметим, что величина потока не зависит от радиуса сферы.

Пример 5.2. Вычислить поток поля $\vec{a} = \{2x, z, y\}$ через верхнюю сторону части плоскости $3x + 2y + z = 6$, расположенной в первом октанте (рис. 29).

Решение. По определению поток $\Pi_{\sigma} = \int_{(\sigma)} (\vec{a} \cdot \vec{n}) \, d\sigma$.

Нормальный вектор заданной плоскости $\vec{N} = \{3, 2, 1\}$;

единичный нормальный вектор $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\{3, 2, 1\}}{\sqrt{14}}$. Его третья координата положи-

тельна, следовательно, он составляет с осью Oz острый угол и определяет верхнюю сторону поверхности. Вычислим скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{n}$ на плоскости $z = 6 - 3x - 2y$:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} (6x + 2z + y) = \frac{1}{\sqrt{14}} (6x + 2(6 - 3x - 2y) + y) = \frac{3}{\sqrt{14}} (4 - y)$$

и элемент $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx \, dy = \sqrt{14} \, dx \, dy$. Тогда получим

$$\Pi_{\sigma} = \int_{(\sigma)} (\vec{a} \cdot \vec{n}) \, d\sigma = \iint_{(\sigma_{xy})} \frac{3}{\sqrt{14}} (4 - y) \cdot \sqrt{14} \, dx \, dy = 3 \iint_{(\sigma_{xy})} (4 - y) \, dx \, dy .$$

Проекция (σ_{xy}) поверхности (σ) на плоскость XOY есть треугольник в плоскости XOY , ограниченный линиями $3x + 2y = 6$, $x = 0$, $y = 0$. Поэтому

$$\Pi_{\sigma} = 3 \int_0^3 (4 - y) \, dy \int_0^{\frac{6-2y}{3}} dx = 3 \int_0^3 (4 - y) \frac{6-2y}{3} \, dy = \frac{6}{3} \int_0^3 (3 - y)(4 - y) \, dy = 27 .$$

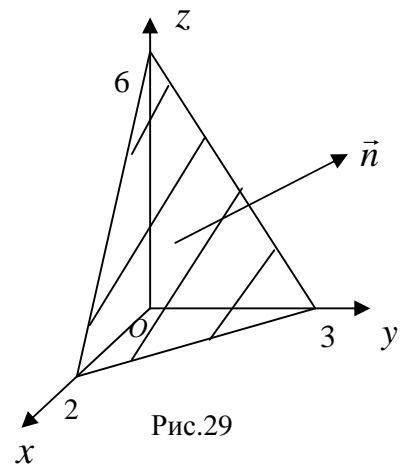
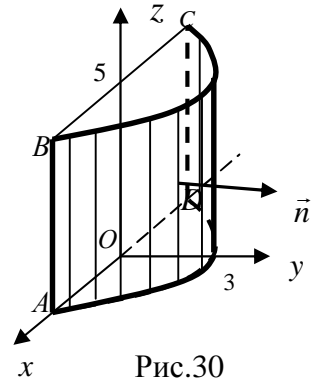


Рис.29

Пример 5.3. Вычислить поток поля $\vec{a} = \{0, y^2, z^2 - x^2\}$ через часть боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0, 0 \leq z \leq 5$) с выбранной внешней нормалью (рис. 30).



Решение. Найдем нормальный вектор поверхности $\vec{N} = \{F'_x, F'_y, F'_z\} = \{2x, 2y, 0\}$, единичный нормальный вектор

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\{2x, 2y, 0\}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{2\{x, y, 0\}}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\{x, y, 0\}}{3}$$

и скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{1}{3}(0 \cdot x + y^2 \cdot y + (z^2 - x^2) \cdot 0) = \frac{y^3}{3}.$$

а). На части (σ_1) поверхности $x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) имеем: $y = \sqrt{9 - x^2}$, $(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{y^3}{3} = \frac{1}{3}(\sqrt{9 - x^2})^3$,

$$d\sigma = \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz = \sqrt{1 + \frac{(-x)^2}{(\sqrt{9 - x^2})^2}} dx dz = \sqrt{\frac{(9 - x^2) + x^2}{9 - x^2}} dx dz = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx dz.$$

Подставляя значение (\vec{a}, \vec{n}) и $d\sigma$ в формулу (5.2) для вычисления потока, получим:

$$P_{\sigma_1} = \int_{(\sigma_1)} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{(\sigma_{xz})} \frac{1}{3} (\sqrt{9 - x^2})^3 \cdot \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx dz = \iint_{(\sigma_{xz})} (9 - x^2) dx dz.$$

Проекция (σ_{xz}) поверхности (σ_1) на плоскость XOZ есть прямоугольник $ABCD$. Поэтому

$$P_{\sigma_1} = \int_0^3 (9 - x^2) dx \int_0^5 dz = 5 \cdot 2 \int_0^3 (9 - x^2) dx = 10 \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 180.$$

б). На поверхности (σ_2) имеем:

$$y = -\sqrt{9 - x^2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{n} = \frac{y^3}{3} = \frac{-1}{3} (\sqrt{9 - x^2})^3, \quad d\sigma = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx dz.$$

Поэтому $P_{\sigma_2} = -P_{\sigma_1} = -180$.

в). Так как $(\sigma_3) = (\sigma_1) \cup (\sigma_2)$, то $P_{\sigma_3} = P_{\sigma_1} + P_{\sigma_2} = 0$.

5.3. Поток через замкнутую поверхность. Дивергенция поля

Поток векторного поля через **замкнутую поверхность** (σ) удобно вычислять по **формуле Остроградского** с помощью дивергенции $\text{div } \vec{a}$ поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$:

$$P_{\sigma} = \oint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{(V)} \text{div } \vec{a} dV, \quad \text{где } \text{div } \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (5.3)$$

В этой формуле (V) — это тело, ограниченное замкнутой поверхностью (σ) ; поверхность (σ) ориентирована внешней нормалью. Вывод формулы Остроградского опустим.

Физический смысл дивергенции

Используя формулу Остроградского, выясним физический смысл дивергенции. Рассмотрим точку M (рис. 31), окружим ее замкнутой поверхностью (σ) и вычислим поток поля \vec{a} через эту поверхность по формуле Остроградского

$$\Pi_{\sigma} = \oint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} \, dV.$$

Применяя к тройному интегралу теорему о среднем, получим

$$\Pi_{\sigma} = (\operatorname{div} \vec{a})_{\tilde{M}} \cdot V \quad \text{или} \quad (\operatorname{div} \vec{a})_{\tilde{M}} = \frac{\Pi_{\sigma}}{V}.$$

Здесь \tilde{M} есть некоторая точка из области (V) . В последнем равенстве перейдем к пределу, стягивая область (V) в точку M (при этом точка \tilde{M} будет стремиться к точке M). Запишем результат предельного перехода:

$$\boxed{(\operatorname{div} \vec{a})_M = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\Pi_{\sigma}}{V}.} \quad (5.4)$$

Мы получили формулу вычисления дивергенции, независимую от системы координат.

Пусть векторное поле \vec{a} есть поле скоростей жидкости. Величина потока Π_{σ} равна разности между количеством жидкости, вытекающей из области (V) , и количеством жидкости, втекающей в эту область. Если $\Pi > 0$, то из области (V) жидкости вытекает больше, чем втекает. Это означает, что в области (V) имеются **источники**, питающие поток жидкости. Величина $\frac{\Pi_{\sigma}}{V}$ определяет количество жидкости, возникающее в единицу времени в единице объема. Ее называют средней мощностью источников в области (V) . Величину

$$\lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\Pi_{\sigma}}{V} = \operatorname{div} \vec{a}(M)$$

называют **мощностью источника** в точке M .

Если $\Pi < 0$, то в область (V) втекает жидкости больше, чем вытекает, т. е.

в области (V) имеются **стоки** со средней мощностью $\left| \frac{\Pi_{\sigma}}{V} \right|$. Величина

$$\left| \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\Pi_{\sigma}}{V} \right| = |\operatorname{div} \vec{a}(M)|$$

есть **мощность стока** в точке M . Итак,

- 1) если $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$, то в точке M имеется источник с мощностью $\operatorname{div} \vec{a}(M)$,
- 2) если $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$, то в точке M имеется сток с мощностью $|\operatorname{div} \vec{a}(M)|$,
- 3) если $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$, то в точке M отсутствуют и источник и сток.

Пример 5.4. Вычислить поток поля $\vec{a} = \{2x, z, y\}$ через поверхность пирамиды, ограниченную плоскостью $3x + 2y + z = 6$ и координатными плоскостями (рис. 29).

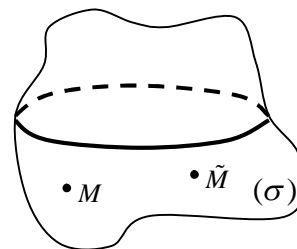


Рис. 31

Решение. Так как поверхность замкнутая, то воспользуемся формулой Остроградского

$$\Pi_{\sigma} = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{(V)} (2+0+0) dV = 2 \cdot V_{\text{нпр.}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h \right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \right) \cdot 6 = 12 .$$

Пример 5.5. Вычислить поток жидкости, текущей со скоростью $\vec{v} = \{x + y, z - x, z\}$ через боковую поверхность $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq 4$) в направлении внешней нормали (рис. 32).

Решение. Поток через боковую поверхность конуса удобно вычислить как разность потока через полную поверхность и потока через основание. Поток через полную поверхность вычислим по формуле Остроградского

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{полн.}} &= \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{v} dV = \int_{(V)} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(z-x) + \frac{\partial}{\partial z}(z) \right) dV = \\ &= 2 \int_{(V)} dV = 2 V_{\text{кон.}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{2\pi}{3} \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{128\pi}{3}. \end{aligned}$$

Поток через основание конуса вычислим по формуле

$$\Pi_{\text{осн.}} = \int_{(\sigma)} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma .$$

Учтем, что единичный вектор нормали к

основанию конуса равен $\vec{n} = \{0, 0, 1\}$. Поэтому

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (x+y) \cdot 0 + (z-x) \cdot 0 + z \cdot 1 = z .$$

На основании конуса $z = 4$, значит, $\vec{v} \cdot \vec{n} = 4$ и

$$\Pi_{\text{осн.}} = \int_{(\sigma)} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 4 \int_{(\sigma)} d\sigma .$$

Здесь σ — площадь основания, т. е. круга радиусом 4. Следовательно,

$$\Pi_{\text{осн.}} = 4 \pi R^2 = 64\pi, \quad \Pi_{\text{бок.}} = \Pi_{\text{полн.}} - \Pi_{\text{осн.}} = \frac{128}{3}\pi - 64\pi = -\frac{64}{4}\pi .$$

Так как $\Pi_{\text{бок.}} < 0$, то через боковую поверхность конуса в направлении внешней нормали течет жидкости меньше, чем в противоположном направлении.

Примеры для самостоятельного решения

1). Вычислить поток поля $\vec{a} = \{x, y, z\}$ через часть поверхности $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 9$) в направлении внешней нормали. *Ответ:* $\frac{81\pi}{2}$.

2). Вычислить поток поля $\vec{a} = \{3x, z^2x, 2-z\}$: а) через поверхность верхней полушеры $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в направлении внешней нормали, б) через основание полушеры в направлении оси OZ . *Ответ:* а) $88\pi/3$, б) 8π .

6. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля

6.1. Задача о работе силы

Пусть задано поле сил $\vec{F}(M)$, под действием которых материальная точка движется по кривой BC от точки B к точке C . Вычислим совершаемую при этом работу. Для этого разобьем линию BC на n частей точками $B = M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = C$ с радиус-векторами $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ (рис. 33). Рассмотрим вектор перемещения

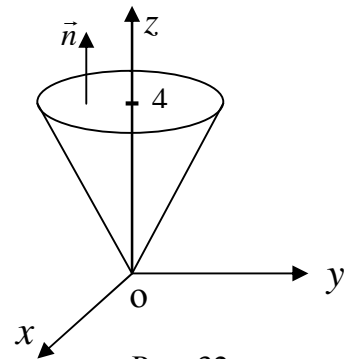


Рис. 32

$$\overline{M_k M_{k+1}} = \vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k = \Delta \vec{r}_k$$

и вектор силы $\vec{F}(M_k) = \vec{F}_k$. Их скалярное произведение приближенно равно работе A_k силы $\vec{F}(M)$ вдоль дуги $M_k M_{k+1}$, т. е.

$$A_k \approx \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{r}_k.$$

Вычислим работу вдоль всей линии BC :

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{r}_k.$$

Это равенство будет тем точнее, чем меньше длины векторов $\Delta \vec{r}_k$. Максимальную из этих длин обозначим d и, переходя к пределу при $d \rightarrow 0$, определим точное значение работы

$$A = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{r}_k. \quad (6.1)$$

Этот предел обозначается $\int_{\cup BC} \vec{F} d\vec{r}$ и называется линейным интегралом поля \vec{F} или криволинейным интегралом второго рода.

6.2. Понятие линейного интеграла и его вычисление

Отвлекаясь от конкретного физического содержания рассмотренной задачи, аналогичным образом вводят понятие линейного интеграла произвольного поля:

$$\int_{\cup BC} \vec{a}(M) d\vec{r} = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \vec{a}(M_k) \cdot \Delta \vec{r}_k, \quad (6.2)$$

где M_1, \dots, M_n — точки разбиения дуги BC , $\Delta \vec{r}_k = \overline{M_k M_{k+1}}$, $d = \max \{ |\Delta \vec{r}_1|, \dots, |\Delta \vec{r}_{n-1}| \}$.

Отметим три свойства линейного интеграла:

$$1) \int_{\cup BC} (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) d\vec{r} = \lambda \int_{\cup BC} \vec{a} d\vec{r} + \mu \int_{\cup BC} \vec{b} d\vec{r} \quad (\text{свойство линейности}),$$

$$2) \int_{\cup BC} \vec{a} d\vec{r} = \int_{\cup BK} \vec{a} d\vec{r} + \int_{\cup KC} \vec{a} d\vec{r} \quad (\text{свойство аддитивности}),$$

3) $\int_{\cup BC} \vec{a} d\vec{r} = - \int_{\cup CB} \vec{a} d\vec{r}$, т. е. при изменении направления обхода кривой линейный интеграл меняет знак, т. к. векторы $\Delta \vec{r}_k$ меняют свое направление на противоположное.

Выразив скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$ через их координаты, получим

$$\int_{\cup BC} \vec{a} d\vec{r} = \int_{\cup BC} P dx + Q dy + R dz. \quad (6.3)$$

По традиции выражение $P dx + Q dy + R dz$ в скобки не заключают, хотя знак интеграла относится ко всему этому выражению. В формуле (6.3) \vec{a}, P, Q, R есть функции

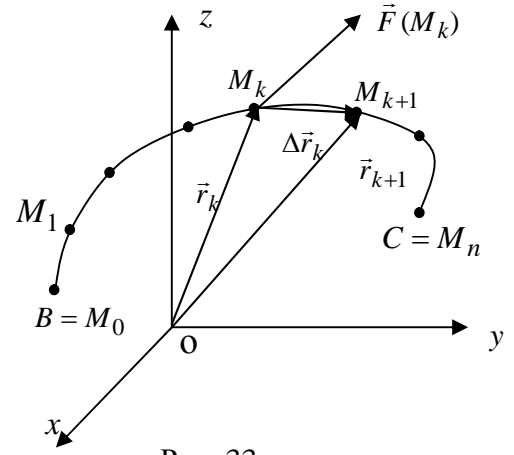


Рис. 33

точки M или ее координат x, y, z . Интеграл $\int_{\cup BC} \vec{a} d\vec{r}$ называют векторной формой, а интеграл $\int_{\cup BC} P dx + Q dy + R dz$ — координатной формой записи линейного интеграла.

В тех случаях, когда линейный интеграл поля \vec{a} берется *по замкнутой кривой* L , он называется *циркуляцией* поля (вектора) \vec{a} по кривой L и обозначается так:

$$C(\vec{a}, L) = \oint_{(L)} \vec{a} d\vec{r}. \quad (6.4)$$

Приняты и другие обозначения циркуляции: $C(\vec{a})$, C .

Не доказывая, сформулируем правило вычисления линейных интегралов в следующих двух случаях.

1. Для вычисления интеграла $\int_{\cup BC} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ по линии BC ,

заданной уравнениями $x(t), y(t), z(t)$ следует

- а) заменить x, y, z в функциях P, Q, R соответственно на $x(t), y(t), z(t)$;
- б) заменить dx, dy, dz соответственно на $x'(t) dt, y'(t) dt, z'(t) dt$;
- в) найти интервал изменения параметра t и вычислить получившийся определенный интеграл по этому интервалу.

2. Для вычисления интеграла $\int_{\cup BC} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ по плоской линии BC с

уравнением $y = y(x), x \in [b; c]$ следует

- а) заменить y в функциях P, Q на $y(x)$;
- б) заменить dy на $y'(x) dx$;
- в) вычислить получившийся определенный интеграл по отрезку $[b, c]$.

Пример 6.1. Вычислить работу силы $\vec{F} = \{x^2, -yz, z\}$ по прямолинейному перемещению из точки $B(1, 2, -1)$ в точку $C(3, 3, 2)$.

Решение. Работа A силы \vec{F} вычисляется по формуле

$$A = \int_{\cup BC} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\cup BC} x^2 dx - yz dy + z dz.$$

Для вычисления этого интеграла составим уравнение прямой BC :

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{3-2} = \frac{z+1}{2+1} = t.$$

Отсюда $x = 2t + 1, y = t + 2, z = 3t - 1; dx = 2 dt, dy = dt, dz = 3 dt$.

Найдем значение параметра t , соответствующее точке B . Для этого подставим абсциссу $x = 1$ точки B в формулу $x = 2t + 1$. Получим $t_B = 0$. Аналогично найдем $t_C = 1$. Заменяя в интеграле x, y, z, dx, dy, dz их выражениями получим

$$A = \int_{\cup BC} x^2 dx - yz dz + z dz = \int_0^1 [(2t+1)^2 \cdot 2 - (t+2)(3t-1) + (3t-1) \cdot 3] dt = \frac{26}{3}.$$

Пример 6.2. Найти циркуляцию поля $\vec{a} = y\vec{i} + 2x\vec{j}$ вдоль линии $OABO$, где OB — дуга параболы $y^2 = x$, OAB — ломаная (рис. 34).

Решение. Циркуляцию поля \vec{a} вычислим по формуле

$$C(\vec{a}) = \int_{OABO} \vec{a} d\vec{r} = \int_{[OA]} \vec{a} d\vec{r} + \int_{[AB]} \vec{a} d\vec{r} + \int_{\cup BO} \vec{a} d\vec{r}.$$

На отрезке OA имеем $y=0$, $dy=0$. Поэтому

$$I_1 = \int_{[OA]} \vec{a} d\vec{r} = \int_{[OA]} y dx + 2x dy = 0.$$

На отрезке AB имеем $x=1$, $dx=0$, $0 \leq y \leq 1$. Поэтому

$$I_2 = \int_{[AB]} y dx + 2x dy = \int_0^1 2 dy = 2.$$

На дуге BO имеем $x = y^2$, $y = y$ (y — параметр), $dx = 2y dy$, $y_B = 1$, $y_0 = 0$;

$$I_3 = \int_{\cup BO} y dx + 2x dy = \int_1^0 (y \cdot 2y + 2y^2) dy = \int_1^0 4y^2 dy = -\frac{4}{3}.$$

Окончательно, $C(\vec{a}) = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 2 - 4/3 = 2/3$.

Пример 6.3. Вычислить циркуляцию поля $\vec{a} = \left\{ -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}$ по окружности (L)

радиусом R с центром в начале координат, ориентированной против часовой стрелки.

Решение. Циркуляция поля \vec{a} вычисляется по формуле

$$C(\vec{a}) = \oint_{(L)} \vec{a} d\vec{r} = \oint_{(L)} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Для вычисления этого интеграла запишем параметрические уравнения окружности (L): $x = R \cos t$, $y = R \sin t$.

Тогда $dx = -R \sin t dt$, $dy = R \cos t dt$; угол t при движении против часовой стрелки меняется от 0 до 2π (рис. 35);

$$C(\vec{a}) = \int_0^{2\pi} \frac{-R \sin t \cdot (-R \sin t) dt + R \cos t \cdot R \cos t dt}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

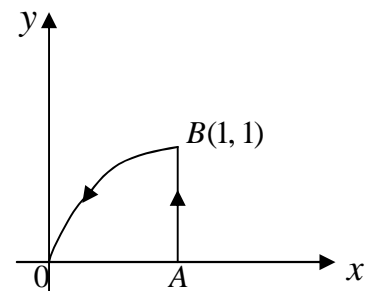


Рис. 34

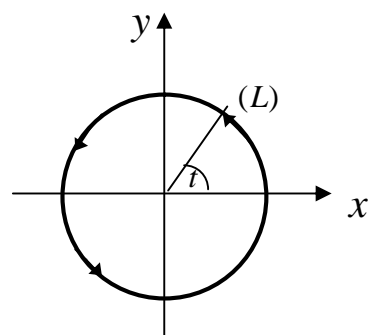


Рис.35

6.3. Вычисление циркуляции. Ротор поля

Циркуляцию, как линейный интеграл поля по замкнутому контуру, можно вычислять способами, изложенными в п. 6.2. Однако часто удобно вычислять циркуляцию плоского поля по формуле Грина, а циркуляцию пространственного поля — по формуле Стокса.

Если при обходе замкнутого контура ограниченная область остается слева, то направление обхода называют положительным. Обход в противоположном направлении называют отрицательным.

Теорема 6.1. Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные непрерывны в области (D) с положительно ориентированной границей (L). Тогда имеет место следующая **формула Грина**:

$$\oint_{(L)} P dx + Q dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy . \quad (6.5)$$

Доказательство проведем для области (D) , описываемой неравенствами $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $a \leq x \leq b$ (рис. 36).

Сначала проверим равенство

$$\oint_{(L)} P dx = - \iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy . \quad (6.6)$$

Сведем криволинейный интеграл $\oint_L P(x, y) dx$ к определенному интегралу, подставляя $y = \varphi_1(x)$ на линии AKB и $y = \varphi_2(x)$ на линии BMA :

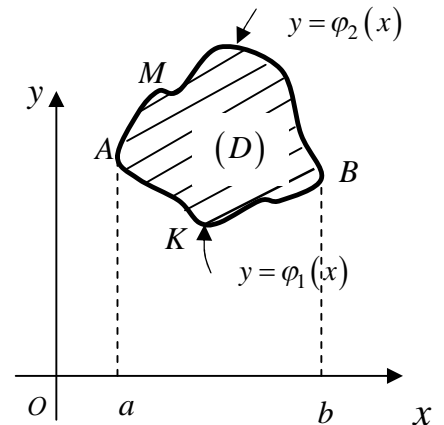


Рис. 36

$$\begin{aligned} \oint_{(L)} P(x, y) dx &= \int_{\cup AKB} P(x, y) dx + \int_{\cup BMA} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx = \\ &= \int_a^b [P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))] dx . \end{aligned}$$

Теперь преобразуем двойной интеграл, сведя его сначала к повторному, а затем к определенному интегралу:

$$- \iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = - \int_a^b dx P(x, y) \Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} = \int_a^b [P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))] dx .$$

И криволинейный, и двойной интеграл из формулы (6.6) свелись к одному и тому же определенному интегралу и, следовательно, они равны. Аналогично проверяется равенство

$$\oint_{(L)} Q dy = \iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy . \quad (6.7)$$

Складывая равенства (6.6) и (6.7), получим формулу Грина.

Пример 6.4. Используя формулу Грина, вычислить циркуляцию поля $\vec{a} = y\vec{i} + 2x\vec{j}$ вдоль линии $OABO$ (рис. 34).

Решение. Вычислим циркуляцию $C = \oint_{OABO} y dx + 2x dy$, используя формулу Грина

$$\text{для } P = y, Q = 2x: C = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{(D)} dx dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 dx = \int_0^1 (1 - y^2) dy = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} .$$

Сравните это решение с решением примера 6.2, где циркуляция этого поля была вычислена без формулы Грина.

Для обобщения формулы Грина на пространственный случай введем понятие ротора векторного поля \vec{a} .

Определение. Ротором векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ называется вектор

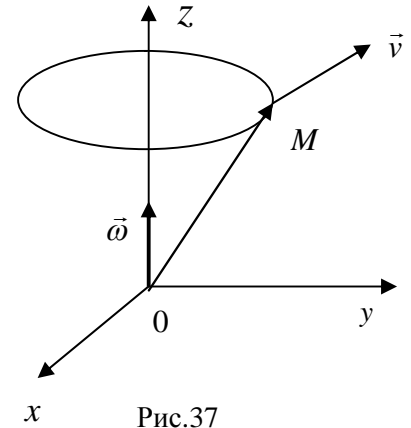
$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (6.8)$$

При вычислении $\operatorname{rot} \vec{a}$ следует разложить определитель по элементам первой строки. Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial x} P = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x} Q = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y} R = \frac{\partial R}{\partial y}$ и т. д., получим

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Пример 6.5. Пусть твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найти поле линейных скоростей точек тела и ротор этого поля.

Решение. Рассмотрим систему координат XYZ , направив ось Oz по оси вращения (рис. 37). Как известно из кинематики линейная скорость \vec{v} точки M равна векторному произведению $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где \vec{r} — радиус вектор точки M , $\vec{r} = \{x, y, z\}$, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости, направленный по оси вращения, с длиной, равной величине угловой скорости ω , т. е. $\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \{0, 0, \omega\}$.



Найдем поле линейных скоростей \vec{v} :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}.$$

Ротор этого поля вычислим по формуле (6.8):

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} (\omega x) \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial z} (-\omega y) \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\omega x) - \frac{\partial}{\partial y} (-\omega y) \right) = 2\omega \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Таким образом, ротор поля линейных скоростей в любой точке равен удвоенному вектору угловой скорости.

В произвольном поле его **ротор**, вычисленный в точке M , также **характеризует вращательную способность поля** в этой точке.

Понятие ротора позволяет удобно вычислять циркуляцию векторного поля, опираясь на следующую **формулу Стокса**:

$$\oint_{(L)} \vec{a} d\vec{r} = \int_{(\sigma)} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (6.9)$$

В этой формуле (σ) — любая поверхность, натянутая на контур (L) , причем ориентация контура (L) и ориентация поверхности (σ) согласованы, т. е., глядя с конца выбранных нормальных векторов поверхности (σ) , обход контура (L) виден против часовой стрелки (рис. 38).

Итак, по формуле Стокса циркуляция поля \vec{a} по замкнутому контуру (L) равна потоку ротора поля \vec{a} через поверхность (σ) , натянутую на контур (L) .

Обоснование этой формулы опустим.

Пример 6.6. Найти циркуляцию поля

$$\vec{a} = (20x^4 + 1)z\vec{i} - 5y\vec{j} + 4x^5\vec{k}$$

по окружности $x^2 + z^2 = 9$, лежащей в плоскости $y = 4$ и ориентированной против часовой стрелки, если смотреть с конца оси OY (рис. 39).

Решение. Циркуляция поля \vec{a} вычисляется по формуле $C = \oint_{(L)} \vec{a} d\vec{r}$. Непосредствен-

ное вычисление этого интеграла достаточно трудоемко. Посмотрим, облегчит ли вычисление циркуляции применение формулы Стокса. Для этого вычислим ротор поля:

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (20x^4 + 1)z & -5y & 4x^5 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - 0) - \vec{j}(20x^4 - 20x^4 - 1) + \vec{k}(0 - 0) = \vec{j}.$$

По формуле Стокса имеем: $C = \oint_{(L)} \vec{a} d\vec{r} = \int_{(\sigma)} (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma$.

В качестве поверхности (σ) , натянутой на окружность, возьмем круг, ограниченный этой окружностью. Нормальный вектор к этой поверхности направлен вдоль оси OY , т.е. $\vec{n} = \vec{j}$; скалярное произведение $\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n} = \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$;

$$C = \int_{(\sigma)} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{(\sigma)} d\sigma = S = \pi R^2 = 9\pi.$$

Примеры для самостоятельного решения

1). Вычислить работу силового поля $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль верхней половины эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ из точки $A(a, 0)$ в точку $B(-a, 0)$.

2). Найти циркуляцию поля $\vec{a} = 2z\vec{i} - y^2\vec{j} - z^5\vec{k}$ по контуру, образованному пересечением плоскости $x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями.

Ответы: 1) $-\pi ab$, 2) 2.

6.4. Условия независимости линейного интеграла от формы пути

В различных приложениях важно знать, зависит ли линейный интеграл поля $\int \vec{a} d\vec{r}$ от формы кривой интегрирования или он зависит только от начальной и конечной точек этой кривой (с физической точки зрения – зависит ли ра-

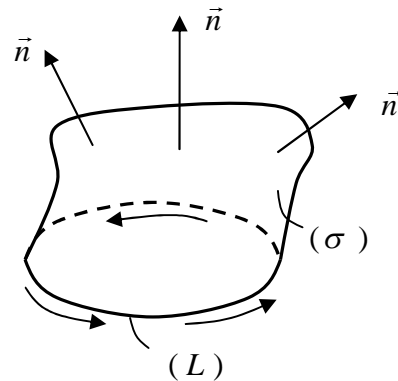


Рис. 38

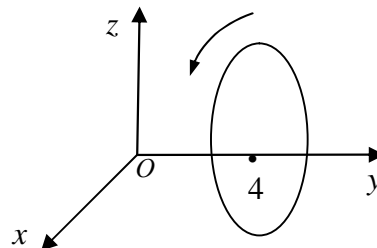


Рис. 39

бота силы от формы пути). Рассмотрим три условия независимости линейного интеграла поля от формы пути интегрирования.

Теорема 6.2 (о равенстве нулю циркуляции). Для того чтобы линейный интеграл поля не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция по любой замкнутой кривой равнялась нулю.

Доказательство. Вычислим циркуляцию поля \vec{a} по произвольной замкнутой кривой $ABCD$ (рис. 40)

$$C(\vec{a}) = \oint_{\cup ABCDA} \vec{a} d\vec{r} = \int_{\cup ABC} \vec{a} d\vec{r} + \int_{\cup CDA} \vec{a} d\vec{r} = \int_{\cup ABC} \vec{a} d\vec{r} - \int_{\cup ADC} \vec{a} d\vec{r}.$$

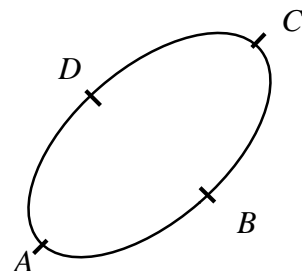


Рис. 40

Из этого равенства следует: циркуляция $C(\vec{a})$ равна нулю тогда и только тогда, когда $\int_{\cup ABC} \vec{a} d\vec{r} = \int_{\cup ADC} \vec{a} d\vec{r}$, т. е. интеграл

$\int_{(L)} \vec{a} d\vec{r}$ по двум произвольным линиям с общим нача-

лом и общим концом принимает одно и то же значение и, значит, не зависит от формы пути интегрирования.

Для формулировки следующей теоремы введем новое понятие. Область назовем **односвязной**, если на любой ее замкнутый контур можно натянуть поверхность, целиком лежащую в этой области.

Например, односвязными областями будут круг, шар, куб; к неодносвязным областям относятся кольцо, тор («бублик») (рис. 41).

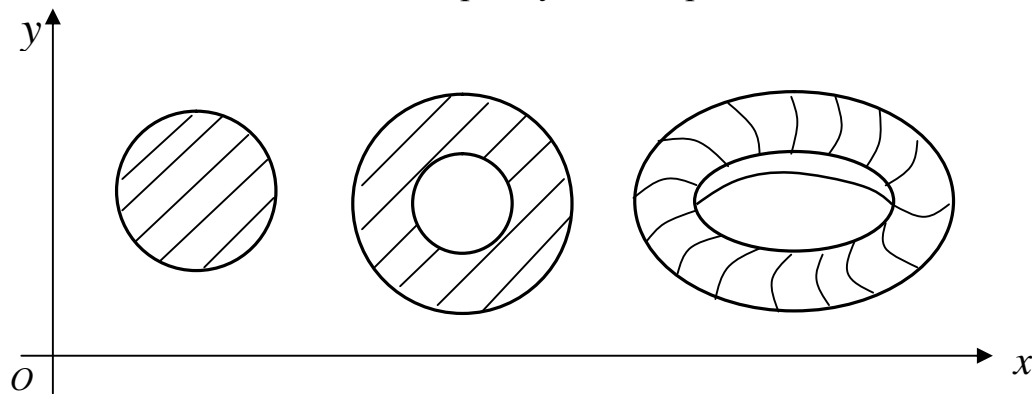


Рис. 41

Теорема 6.3 (о равенстве нулю ротора). Для того чтобы линейный интеграл поля не зависел от формы пути интегрирования, необходимо, а для односвязного поля и достаточно, чтобы ротор поля в каждой точке равнялся нулю.

Достаточность. Пусть $\text{rot } \vec{a} = 0$ в односвязной области (D) . Возьмем любой замкнутый контур (L) из области (D) . В силу односвязности области (D) на контур (L) можно натянуть поверхность (σ) , целиком лежащую в области (D) . Вычислим циркуляцию поля \vec{a} по контуру (L) , используя формулу Стокса

$$C(\vec{a}, L) = \int_{(L)} \vec{a} d\vec{r} = \int_{(\sigma)} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = 0.$$

Так как циркуляция поля \vec{a} по любому замкнутому контуру (L) равна нулю, то по теореме 6.2 интеграл $\int_{(L)} \vec{a} d\vec{r}$ не зависит от формы пути интегрирования.

Необходимость. Пусть линейный интеграл поля \vec{a} не зависит от формы пути интегрирования и, значит, циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю. Доказывая от противного, предположим, что в некоторой точке M поля $\text{rot } \vec{a} \neq \vec{0}$. Следовательно, отлична от нуля хотя бы одна из координат ротора. Пусть, например, первая координата, т. е. $\text{pr}_{\vec{i}} \text{rot } \vec{a}$ отлична от нуля, в частности больше нуля, в точке M , а значит, и в некоторой ее окрестности. В этой окрестности возьмем часть плоскости (σ) с нормальным вектором $\vec{n} = \vec{i}$ и вычислим циркуляцию поля \vec{a} по границе (L) поверхности (σ) , используя формулу Стокса:

$$C(\vec{a}, L) = \oint_{(L)} \vec{a} d\vec{r} = \int_{(\sigma)} (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = \int_{(\sigma)} (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{i}) d\sigma = \int_{(\sigma)} (\text{pr}_{\vec{i}} \text{rot } \vec{a}) d\sigma.$$

Так как по нашему предположению $\text{pr}_{\vec{i}} \text{rot } \vec{a} > 0$ в окрестности точки M , а значит и на (σ) , то $C(\vec{a}, L) > 0$. Получили противоречие с тем, что циркуляция поля \vec{a} по любому замкнутому контуру равна нулю. Следовательно, предположение о том, что $\text{rot } \vec{a} \neq \vec{0}$, неверно. Теорема доказана.

Теорема 6.4 (о подынтегральном выражении). Для того чтобы линейный интеграл поля $\int_{(L)} \vec{a} d\vec{r}$ не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $\vec{a} d\vec{r}$ было полным дифференциалом некоторой функции U .

Достаточность. Пусть существует функция $U(x, y, z)$ такая, что $\vec{a} d\vec{r} = dU$. Рассмотрим интеграл $\int_{\cup AB} \vec{a} d\vec{r}$ по произвольной дуге AB с параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$; $t \in [t_A, t_B]$. Сведем этот интеграл к определенному интегралу и применим формулу Ньютона-Лейбница

$$\begin{aligned} \int_{\cup AB} \vec{a} d\vec{r} &= \int_{\cup AB} dU(x, y, z) = \int_{t_A}^{t_B} dU(x(t), y(t), z(t)) = U(x(t), y(t), z(t)) \Big|_{t_A}^{t_B} = \\ &= U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A) = U(B) - U(A). \end{aligned}$$

Таким образом, значение интеграла $\int_{\cup AB} \vec{a} d\vec{r}$ зависит только от точек A, B и не зависит от формы линии AB . Доказательство необходимости опустим.

Попутно мы получили важную формулу, являющуюся аналогом формулы Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов:

$$\boxed{\int_{\cup AB} dU = U(B) - U(A).} \quad (6.10)$$

Теоремы 6.2, 6.3, 6.4 иногда объединяют в одну:

- Если область (D) является односвязной, то четыре условия равносильны
- 1) линейный интеграл $\int \vec{a} d\vec{r}$ не зависит от формы пути интегрирования;
 - 2) линейный интеграл $\int \vec{a} d\vec{r}$ по любому замкнутому контуру в (D) равен нулю;
 - 3) $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$ во всех точках области (D) ;
 - 4) выражение $\vec{a} d\vec{r}$ является полным дифференциалом некоторой функции U .

Рассмотрим некоторые важные классы векторных полей.

7. Потенциальные, соленоидальные, гармонические поля

Векторное поле \vec{a} называют **потенциальным**, если оно является **полем градиента** некоторой скалярной функции U . При этом функцию U называют потенциалом векторного поля.

Напомним, что $\text{grad}U = U'_x \vec{i} + U'_y \vec{j} + U'_z \vec{k}$. Так как $\text{grad}(U + C) = \text{grad}U$, то $U + C$ также является потенциалом.

Свойства потенциального поля

Ограничимся случаем односвязного поля.

- 1). Поле \vec{a} является потенциальным с потенциалом U тогда и только тогда, когда $\vec{a} d\vec{r} = dU$.
- 2). В потенциальном поле линейный интеграл $\int \vec{a} d\vec{r}$ не зависит от формы пути.
- 3). В потенциальном поле циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.
- 4). Поле \vec{a} потенциально тогда и только тогда, когда в каждой точке поля $\text{rot } \vec{a} = 0$.
- 5). В потенциальном поле линейный интеграл по дуге равен разности потенциалов конца и начала дуги.

Действительно,

- 1) поле \vec{a} — потенциально, т.е. $\vec{a} = \text{grad}U = \{U'_x, U'_y, U'_z\}$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = \{U'_x, U'_y, U'_z\} \cdot \{dx, dy, dz\} = U'_x dx + U'_y dy + U'_z dz = dU;$$

- 2) это свойство следует из свойства 1) и теоремы 6.4;
- 3) это свойство следует из свойства 2) и теоремы 6.2;
- 4) это свойство является следствием свойства 2) и теоремы 6.3;
- 5) если поле \vec{a} потенциально и U — его потенциал, то $\vec{a} d\vec{r} = dU$ и по формуле (6.10) имеем

$$\int_{\cup AB} \vec{a} d\vec{r} = \int_{\cup AB} dU = U(B) - U(A).$$

В силовом потенциальном поле свойства 2 и 5 означают, что работа сил поля по дуге не зависит от формы дуги и равна разности потенциалов конца и начала дуги.

Рассмотрим способы отыскания потенциала U поля \vec{a} .

Отыскание потенциала по выражению $\vec{a} d\vec{r}$

Воспользуемся первым свойством потенциального поля. Если удастся представить выражение $\vec{a} d\vec{r}$ в виде полного дифференциала некоторой функции U , то поле \vec{a} — потенциально, а U — его потенциал.

Пример 7.1. Показать, что поле \vec{a} потенциально и найти его потенциал, если

$$1) \vec{a} = 2x\vec{i} + 3y^2\vec{j} + 4z^3\vec{k}, \quad 2) \vec{a} = \{yz, xz, xy\}, \quad 3) \vec{a} = \frac{\{x, y, z\}}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}.$$

Решение.

$$1) \vec{a} \cdot d\vec{r} = 2x dx + 3y^2 dy + 4z^3 dz = d(x^2) + d(y^3) + d(z^4) = d(x^2 + y^3 + z^4).$$

Следовательно, поле \vec{a} — потенциально, а $U = x^2 + y^3 + z^4$ — его потенциал.

$$2) \vec{a} d\vec{r} = yz dx + xz dy + xy dz = d(xyz).$$

Следовательно, поле \vec{a} потенциально, а $U = xyz$ — его потенциал.

$$3) \vec{a} d\vec{r} = \frac{x dx + y dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} = \frac{1}{2} d(\ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)).$$

Следовательно, поле \vec{a} — потенциально, а его потенциал $U = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$.

Отыскание потенциала по определению

Для потенциального поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и его потенциала U имеем $\text{grad} U = \vec{a}$ или в координатной форме

$$U'_x = P, \quad U'_y = Q, \quad U'_z = R \tag{7.1}$$

Проинтегрируем первое из этих равенств по x ; при этом появится константа, не зависящая от переменной интегрирования x (но зависящая от y, z):

$$U = \int P(x, y, z) dx + c(y, z).$$

Для отыскания функции $c(y, z)$ следует подставить получившуюся функцию $U(x, y, z)$ во второе и третье равенства (7.1).

Пример 7.2. Проверить, что поле $\vec{a} = \left(\frac{z}{y} + x\right)\vec{i} - \frac{xz}{y^2}\vec{j} + \left(\frac{x}{y} + 1\right)\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

Решение. Для данного поля проверить его потенциальность и найти потенциал по выражению $\vec{a} d\vec{r}$ сложно. Поэтому потенциальность поля проверим по условию $\text{rot } \vec{a} = 0$, а потенциал найдем исходя из формул (7.1). Итак, вычислим ротор:

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{z}{y} + x & -\frac{xz}{y^2} & \frac{x}{y} + 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2} \right) - \vec{j} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y} \right) + \vec{k} \left(-\frac{z}{y^2} + \frac{z}{y^2} \right) = \vec{0}.$$

Значит поле \vec{a} потенциально и его потенциал U удовлетворяет условию $\text{grad} U = \vec{a}$ или в координатной форме

$$U'_x = \frac{z}{y} + x, \quad U'_y = -\frac{xz}{y^2}, \quad U'_z = \frac{x}{y} + 1.$$

Проинтегрируем первое из этих равенств по x

$$U = \int \left(\frac{z}{y} + x \right) dx = \frac{z}{y}x + \frac{x^2}{2} + c(y, z)$$

и подставим получившуюся функцию $U(x, y, z)$ во второе и третье равенства:

$$U'_y = \frac{-xz}{y^2} + c'_y(y, z) = \frac{-xz}{y^2}, \quad U'_z = \frac{x}{y} + c'_z(y, z) = \frac{x}{y} + 1.$$

Отсюда $c'_y = 0$, $c'_z = 1$. Следовательно, $c(y, z) = z + c_1$, где c_1 — константа. Поэтому

$$U = \frac{z}{y}x + \frac{x^2}{2} + z + c_1.$$

Чтобы проверить правильность отыскания потенциала U нужно найти $\text{grad} U = \{U'_x, U'_y, U'_z\}$ и показать, что он совпадает с вектором поля \vec{a} .

Введем понятия **соленоидального и гармонического полей**.

Если $\text{div} \vec{a} = 0$, то поле называют соленоидальным.

Поле \vec{a} , являющееся одновременно и потенциальным и соленоидальным, называют гармоническим полем.

Так как гармоническое поле \vec{a} потенциально, то оно обладает потенциалом U и представимо в виде $\vec{a} = \text{grad} U$. С другой стороны, гармоническое поле является соленоидальным, поэтому

$$\text{div} \vec{a} = \text{div}(\text{grad} U) = 0.$$

Так как $\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$, то

$$\text{div}(\text{grad} U) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Таким образом, потенциал U гармонического поля \vec{a} удовлетворяет уравнению, которое называют **уравнением Лапласа**:

$$\boxed{\text{div}(\text{grad} U) = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0}. \quad (7.2)$$

Правая часть этих равенств называется **оператором Лапласа**. Оператор Лапласа играет важную роль при решении задач колебаний, теплопроводности, диффузии.

Функция U , удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется **гармонической**.

Рассмотренные операции скалярного и векторного поля удобно записывать с помощью условного вектора $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ (его называют вектором “набла” или оператором Гамильтона):

$$\operatorname{grad} U = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} U, \frac{\partial}{\partial y} U, \frac{\partial}{\partial z} U \right\} = \vec{\nabla} U,$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q + \frac{\partial}{\partial z} R = \vec{\nabla} \cdot \vec{a},$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a},$$

$$\Delta U = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = \vec{\nabla}^2 U.$$

Такая запись основных операций поля наиболее часто используется в физических и технических приложениях, связанных с изучением реальных физических полей.

Примеры для самостоятельного решения

1). Проверить потенциальность поля, найти его потенциал

$$\text{а) } \vec{a} = \left\{ \frac{yz, xz, xy}{x^2 y^2 z^2 + 1} \right\}; \quad \text{б) } \vec{a} = \left\{ 3x^2 e^y - \frac{z^2}{x^2}, x^3 e^y, \frac{2z}{x} \right\}.$$

Ответы: а) $U = \operatorname{arctg}(xyz) + C$, б) $U = x^3 e^y + \frac{z^2}{x} + C$.

2). Будет ли поле $\vec{a} = \left(\frac{z}{y} + x \right) \vec{i} - \frac{xz}{y^2} \vec{j} + \left(\frac{x}{y} + 1 \right) \vec{k}$ соленоидальным? Ответ: нет.

3). Показать, что поле $\vec{a} = 2xy \vec{i} + (x^2 - z^2) \vec{j} - 2yz \vec{k}$ является гармоническим.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике /Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч.1. 288 с.
2. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики /И.П. Натансон. СПб.: Изд-во «Лань», 2003. 736 с.
3. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики /Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. М.: Изд-во «Астрель», 2003. 654 с.
4. Краснов М.Л. Вся высшая математика./М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2001. Ч.1. 352 с.
5. Высшая математика /под редакцией Яковлева Г.Н. М.: Высшая школа, 2004. 584 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа /под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича М.: Наука, 1996. 366 с.
7. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов /И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев .М.: Наука, 1980. 946 с.
8. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа /Г.Н. Берман. М.: Наука, 2002. 443 с.
9. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.
10. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М.: Высш. шк., 1997. Ч.2. 304 с.
11. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учебное пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений /Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В.А. Ефименко и др.; под ред. Б.П. Демидовича. М.: ООО "Издательство Астрель", 2002. 495 с.

Учебно-методическое издание

Ревекка Максовна Минькова

Интегралы по фигуре и теория поля

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Компьютерная верстка *С.Б. Смирнова, К.С. Яркова, Р.М. Миньковой*

Подисано в печать 26.09.2005	Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать	Усл. печ.л. 3.13
Уч.-изд. л. 3.2 Тираж Заказ	Цена "С"

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19