Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

Н.М. Кравченко

Дифференциальные уравнения и ряды

Учебно-методическое пособие

Научный редактор доц., канд. физ.-мат. наук Р.М. Минькова

Печатается по решению редакционно-издательского
совета ГОУ ВПО УГТУ-УПИ

Екатеринбург
2006

УДК 512 (075)
ББК 22.37

Рецензенты:
кафедра высшей математики Уральского государственного экономического-университета, зав. кафедрой проф., канд. физ.-мат. наук Н.И. Чвялева;

проф., д-р физ.-мат. наук В. Б. Репницкий (Уральский государственный университет им. А. М. Горького, кафедра алгебры и дискретной математики)

Автор: Н.М. Кравченко

Дифференциальные уравнения и ряды: учебно-методическое пособие по курсу «Высшая математика» / Н.М. Кравченко. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. 50 с.

ISBN 5-321-00547-8

Учебно-методическое пособие содержит основные понятия теории, подробное решение типовых задач, примеры для самостоятельного решения.

Библиогр.: 7 назв. Рис.10.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики».

УДК 512 (075)
ББК 22.37

ISBN 5-321-00547-8

Глава 1. Дифференциальные уравнения

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Решение различных задач математики, физики, химии и других наук приводит часто к уравнениям, связывающим независимую переменную, искомую функцию и её производные. Такие уравнения называют ***дифференциальными.*** ***Решением*** дифференциального уравнения (ДУ) называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Наибольший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется ***порядком*** этого уравнения.

Например, дифференциальное уравнение $x^2y''' = (y'')^2$ имеет третий порядок, а уравнение $x^2(y - xy') = y(y')^2$ – первый порядок.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется ***интегрированием***, график решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

Рассмотрим задачу, решение которой приводит к дифференциальному уравнению: найти кривую, проходящую через точку (3;1), у которой отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $y = f(x)$ – уравнение искомой кривой; *M(x, y)* – произвольная точка этой кривой (рис.1). Так как по условию задачи $AM = BM$, то $OC = CB = x$. Из ΔCBM: $\operatorname{tg}\angle MBC = \dfrac{MC}{CB} = \dfrac{y}{x}$. Так как

$$\operatorname{tg}\angle MBC = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \text{, то } -\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha$ − это угловой коэффициент касательной к кривой в точке *M(x,y)*, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$. Таким образом,

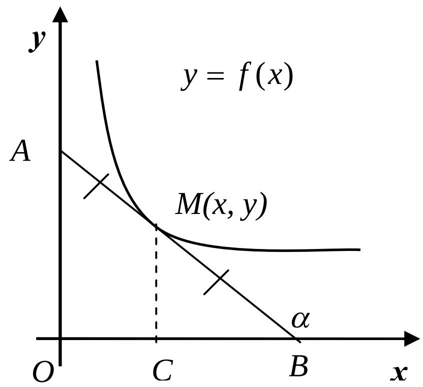

Рис.1

получаем $y' = -\dfrac{y}{x}$. Это уравнение есть дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $y(x)$. Его решением является функция $y(x) = \dfrac{3}{x}$. Решение будет приведено в п.2.3. (пример 2.3).

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

2.1. Основные понятия

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.1}$$

где x − независимая переменная; $y = y(x)$ − искомая функция; y' − её производная. Иногда уравнение (2.1) можно разрешить относительно y':

$$y' = f(x, y), \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) можно записать в дифференциальной форме, заменив y' на $\frac{dy}{dx}$:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \tag{2.3}$$

Например, уравнение $y'=\frac{x^2}{y}$ можно записать в виде $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$ или $x^2dx-y\,dy=0$.

Дифференциальное уравнение в общем случае имеет бесконечное множество решений. Решением уравнения $y'=\cos x$ является функция $y=\sin x$, а также функции $y=\sin x-3$, $y=\sin x+1{,}5$ и вообще $y=\sin x+c$, где $c-const$.

Чтобы получить одно решение дифференциального уравнения, необходимо подчинить его некоторым дополнительным условиям.

Условие, что функция $y(x)$ должна быть равна определенному значению y_0, при $x=x_0$, называется ***начальным условием.*** Начальное условие записывают в виде:

$$y(x_0)=y_0 \quad \text{или} \quad y\big|_{x=x_0}=y_0. \tag{2.4}$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y=\varphi(x,c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

а) функция $\varphi(x,c)$ есть решение дифференциального уравнения при любом конкретном значении постоянной c;

б) каково бы ни было допустимое начальное условие (2.4), можно найти такое значение постоянной $c=c_0$, что функция $y=\varphi(x,c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y=\varphi(x,c_0)$, полученная из общего решения $y=\varphi(x,c)$ при конкретном значении постоянной $c=c_0$.

С геометрической точки зрения общее решение дифференциального уравнения есть семейство интегральных кривых на плоскости XOY; частное решение – одна интегральная кривая этого семейства, проходящая через заданную точку (x_0,y_0).

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения первого порядка (2.2), удовлетворяющего начальному условию (2.4), называется ***задачей Коши.***

Теорема 2.1 (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении $y'=f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и её частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области, содержащей точку (x_0,y_0), то в этой области существует единственное решение $y=\varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Доказательство не приводим.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что существует единственная интегральная кривая дифференциального уравнения, проходящая через точку (x_0,y_0), если выполняется условие теоремы.

В процессе решения дифференциального уравнения мы нередко приходим к соотношению вида $\Phi(x,y,c)=0$, которое неявно определяет искомую функцию

$y(x)$. Такое равенство называют ***общим интегралом*** дифференциального уравнения, а равенство $\Phi(x, y, c_0) = 0$ называется ***частным интегралом*** уравнения.

2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида

$$\boxed{y' = f(x)\cdot\varphi(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot\varphi(y)} \tag{2.5}$$

называют уравнениями ***с разделяющимися переменными.*** Умножением на dx и делением на $\varphi(y)$ уравнение приводится к виду

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx\,, \quad \left(\ \varphi(y) \neq 0\ \right), \tag{2.6}$$

в котором переменная y находится в одной части равенства, а переменная x – в другой, т.е. переменные разделены. Интегрируя уравнение (2.6), получим $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C$, которое задаёт решение $y(x)$ в неявном виде.

Уравнение, записанное в виде

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0\,,$$

также будет уравнением с разделяющимися переменными. Перенесём второе слагаемое в правую часть:

$$M_1(x)N_1(y)\,dx = -M_2(x)N_2(y)\,dy\,,$$

разделим на выражение $N_1(y)M_2(x) \neq 0$ и получим уравнение $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$, в котором переменные x и y разделены.

Пример 2.1. Решить уравнение $x\,y' + y = y^2$, $(x \neq 0)$.

Решение. Данное уравнение есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Представим его в виде $y' = \frac{y^2 - y}{x}$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - y}{x}$, откуда $\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dy}{x}$. Переменные разделены, интегрируем: $\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x}$.

Найдем интеграл, стоящий в левой части,

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = \ln|\,y-1| - \ln|\,y\,|\,.$$

Возвращаясь к предыдущему равенству, получаем

$$\ln|y-1| - \ln|y| = \ln|\,x\,| + \ln|\,c\,|, \qquad \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|\,xc\,|, \qquad \left|\frac{y-1}{y}\right| = |\,xc\,|, \qquad \frac{y-1}{y} = \pm c\,x\,.$$

Обозначив произвольную постоянную $\pm c$ через c_1 и выразив y из последнего равенства, получим общее решение уравнения $y = \frac{1}{1 - x c_1}$. При делении на $y^2 - y$ могли быть потеряны решения $y = 0$ и $y = 1$. Очевидно, что они удовлетворяют уравнению.

Пример 2.2. Найти общее решение уравнения $\sqrt{y^2+1}\,dx - x\,y\,dy = 0$, $(x \neq 0)$.

Решение. Делим обе части уравнения на $x\sqrt{y^2+1}$: $\frac{dx}{x}=\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}}$.

Интегрируем: $\int\frac{dx}{x}=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}}+c$, т.е. $\ln|x|=\sqrt{y^2+1}+c$.

Решение получено в неявном виде. Оно является общим интегралом уравнения.

Пример 2.3. Найти решение уравнения $y'=-\frac{y}{x}$, удовлетворяющее условию $y(3)=1$.

Решение. Имеем $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ или $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$. Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}, \text{ т.е. } \ln|y|=-\ln|x|+\ln|c|.$$

Отсюда $y=\frac{c}{x}$ – общее решение дифференциального уравнения. Оно представляет собой семейство гипербол. Выделим одну из них, которая проходит через точку (3;1). Подставим $x=3$, $y=1$ в общее решение: $1=\frac{c}{3}$, $c=3$. Следовательно, $y=\frac{3}{x}$ – искомое решение дифференциального уравнения.

2.3. Однородные дифференциальные уравнения

Однородное дифференциальное уравнение это уравнение вида

$$\boxed{y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) с помощью подстановки

$$\frac{y}{x}=u, \quad \text{т.е.} \quad y=ux, \tag{2.8}$$

где $u=u(x)$, преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными. Действительно, подставляя $y=ux$ и $y'=u'x+u$ в уравнение, получим $u'x+u=\varphi(u)$ или $\frac{du}{dx}x=\varphi(u)-u$. Это – уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 2.4. Найти общий интеграл уравнения $xy'-y=x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду (2.7):

$$y'-\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{y}{x}, \qquad y'=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}$$

Положим $y=ux$, тогда $y'=u'x+u$. Подставляя в уравнение, получим: $u'x+u=u+\operatorname{tg}u$, $u'=\frac{\operatorname{tg}u}{x}$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\operatorname{tg}u}{x}, \quad xdu=\operatorname{tg}u\,dx, \quad \frac{du}{\operatorname{tg}u}=\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем: $\int\frac{\cos u\,du}{\sin u}=\int\frac{dx}{x}$, $\int\frac{d(\cos u)}{\sin u}=\int\frac{dx}{x}$,

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln|c|, \quad \sin u=c\cdot x.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем $\sin\frac{y}{x}=c\,x$ – общий интеграл исходного уравнения или $y=x\cdot\arcsin(c\,x)$ − общее решение уравнения.

Пример 2.5. Найти общее решение уравнения $\left(x\,y+x^2\right)dy-y^2\,dx=0$.

Решение. Выразим из уравнения $\frac{dy}{dx}$:

$$\left(x\,y+x^2\right)\frac{dy}{dx}-y^2=0, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x\,y+x^2}, \qquad y'=\frac{y^2}{x\,y+x^2}.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на x^2, получим однородное уравнение $y'=\frac{(y/x)^2}{(y/x)+1}$. Подставим в уравнение $y=ux$, $y'=u'x+u$:

$$u'\,x+u=\frac{u^2}{u+1}, \qquad \frac{du}{dx}x=-\frac{u}{u+1}.$$

Разделим переменные: $\frac{u+1}{u}du=-\frac{dx}{x}$, $\left(1+\frac{1}{u}\right)du=-\frac{dx}{x}$.

Проинтегрируем: $u+\ln|u|=-\ln|x|+c$, $u=-\ln|u\,x|+c$.

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получим $y=-x\ln|y|+c\,x$ − общий интеграл уравнения.

2.4. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если оно имеет вид

$$\boxed{y'+p(x)\,y=q(x),} \tag{2.9}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные непрерывные функции.

Рассмотрим один из методов решения линейного уравнения – метод подстановки. Решение уравнения (2.9) ищется в виде произведения двух функций

$$\boxed{y(x)=u(x)\cdot v(x).}$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получим $y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

Подставляя выражения для $y'(x)$ и $y(x)$ в уравнение (2.9), получаем:

$$u'v+u\,v'+p(x)\,u\,v=q(x) \qquad \text{или} \qquad u'v+u\left(v'+p(x)v\right)=q(x). \tag{2.10}$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. находим какое-либо решение дифференциального уравнения $v'(x)+p(x)v=0$, которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Подставляя найденное решение $v(x)$ в уравнение (2.10), получаем ещё одно уравнение с разделяющимися переменными $u'(x)\,v(x)=q(x)$.

Находим его общее решение $u(x,c)$. Возвращаясь к переменной y, получим $y(x)=u(x,c)\cdot v(x)$. Это есть общее решение исходного линейного уравнения (2.9).

Пример 2.6. Найти общее решение уравнения $y'+\frac{y}{x}=3x$.

Решение. Полагаем $y=u\cdot v$. Тогда $u'v+uv'+\frac{uv}{x}=3x$, т.е.

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=3x. \tag{2.11}$$

Функцию $v(x)$ найдём из уравнения $v'+\frac{v}{x}=0$ или $\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}$, т.е. $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, получим $\ln|v|=-\ln|x|$, $v=\frac{1}{x}$. Подставляя $v=\frac{1}{x}$ в уравнение (2.11), получаем уравнение для определения $u(x)$:

$$u'\frac{1}{x}=3x \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx}=3x^2 \quad \text{или} \quad du=3x^2dx.$$

Интегрируя, найдём $u=x^3+c$. Следовательно, общее решение данного уравнения есть $y=u\cdot v=\left(x^3+c\right)\cdot\frac{1}{x}$ или $y=x^2+\frac{c}{x}$.

Пример 2.7. Найти частное решение уравнения $y=x(y'-x\cos x)$, удовлетворяющее условию $y(\pi)=\pi$.

Решение. Для определения типа уравнения выразим из него y':

$$\frac{y}{x}=y'-x\cos x, \quad (x\neq 0), \qquad y'-\frac{y}{x}=x\cos x.$$

Получили линейное уравнение. Сделаем подстановку $y=u\cdot v$. Тогда уравнение примет вид: $u'v+uv'-\frac{uv}{x}=x\cos x$ или

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=x\cos x. \tag{2.12}$$

Функцию $v(x)$ находим из уравнения $v'-\frac{v}{x}=0$ или $\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, получим $\ln|v|=\ln|x|$ или $v=x$. Подставим $v=x$ в уравнение (2.12): $u'x=x\cos x$ или $u'=\cos x$. Решая это уравнение, находим $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}=\cos x, \qquad du=\cos x dx, \qquad u=\sin x+c.$$

Общее решение исходного уравнения есть $y=u\cdot v=(\sin x+c)\cdot x$ или $y=x\sin x+cx$. Подставляя $x=\pi$, $y=\pi$ в общее решение, получим: $\pi=\pi\sin\pi+c\pi$, $\pi=c\pi$, $c=1$. Таким образом, частное решение уравнения будет $y=x\sin x+x$.

Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{y'+p(x)y=q(x)\cdot y^{\alpha}} \tag{2.13}$$

называется ***уравнением Бернулли.*** При $\alpha=0$ уравнение (2.13) является линейным, при $\alpha=1$ – уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение Бернулли можно решить тем же методом, что и линейное уравнение.

Пример 2.8. Найти общее решение уравнения Бернулли $y'+y\operatorname{tg}x=-\frac{y^2}{\cos x}$.

Решение. Полагаем $y = u \cdot v$. Тогда $u'v + uv' + uv \ \operatorname{tg} x = -\frac{u^2v^2}{\cos x}$, т.е.

$$u'v + u\left(v' + v \operatorname{tg} x\right) = -\frac{u^2v^2}{\cos x}. \qquad (2.14)$$

Находим функцию $v(x)$ из уравнения $v' + v \ \operatorname{tg} x = 0$:

$$\frac{dv}{dx} = -v \operatorname{tg} x, \qquad \frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x\, dx, \qquad \ln|v| = \ln|\cos x|, \qquad v = \cos x.$$

Подставляя $v = \cos x$ в уравнение (2.14), получим уравнение для определения $u(x)$: $u' = -u^2$, $-\frac{du}{u^2} = dx$. Проинтегрировав, найдём: $\frac{1}{u} = x + c$, $u = \frac{1}{x + c}$.

Отсюда общее решение уравнения Бернулли есть $y = u \cdot v = \frac{\cos x}{x + c}$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $(e^{2x} + 5)\, dy + y e^{2x} dx = 0$. 2. $y \ln y + x y' = 0$. 3. $x y' = x^3 + y$.
4. $x y' - y = 2x y^2$. 5. $x y + y = y^2$. 6. $x\, (y' - y) = e^x$.
7. $y' = \frac{y}{x} - e^{y/x}$. 8. $\left(x^2 + y^2\right) y' = x y$.

Найти частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

9. $y' = e^{x-y}$, $y(0) = 0$. 10. $y = x y' - x^2 \cos x$, $y(\pi/2) = 0$.
11. $y' = \frac{3y}{x} - 6x^3y^2$, $y(1) = 1$. 12. $\sqrt{1 - x^2}\, y' = x$, $y(0) = -1$.

Ответы: 1. $y = \frac{c}{\sqrt{e^{2x} + 5}}$. 2. $y = e^{c/x}$. 3. $y = x\left(x^2/2 + c\right)$.
4. $y = -\frac{x}{x^2 + c}$. 5. $y = \frac{1}{1 - x \cdot c}$. 6. $y = e^x\left(\ln|x| + c\right)$.
7. $e^{-y/x} = \ln|c x|$. 8. $x^2 = 2y^2 \ln|y \cdot c|$. 9. $y = x$.
10. $y = x\, (\sin x - 1)$. 11. $y = \frac{7x^3}{1 + 6x^7}$. 12. $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

3. Дифференциальные уравнения второго порядка

3.1. Основные понятия

Дифференциальное уравнение второго порядка записывается в виде

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0 \qquad (3.1)$$

или, если это возможно, в виде, разрешенном относительно второй производной

$$y'' = f\left(x, y, y'\right). \qquad (3.2)$$

Например, уравнение $y'' = 6x$ есть простейшее уравнение второго порядка. Проинтегрировав, получим $y' = 3x^2 + c_1$. Ещё раз проинтегрируем: $y = x^3 + c_1 x + c_2$ – общее решение. Для отыскания констант c_1, c_2 нужны два условия. Их задают в виде $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ и называют ***начальными условиями***.

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y=\varphi(x,c_1,c_2)$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

а) функция $y=\varphi(x, c_1, c_2)$ есть решение дифференциального уравнения при любых значениях постоянных c_1, c_2;

б) каковы бы ни были допустимые начальные условия

$$y(x_0)=y_0, \qquad y'(x_0)=y'_0, \tag{3.3}$$

можно найти такие единственные значения постоянных c_1^0 и c_2^0, что функция $y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0)$ удовлетворяет данным начальным условиям.

Частным решением дифференциального уравнения второго порядка называется любая функция, полученная из общего решения при конкретных значениях постоянных c_1, c_2.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3.3), называется ***задачей Коши.***

Теорема 3.1 (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении $y''=f(x,y,y')$ функция $f(x,y,y')$ и её частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области, содержащей точку (x_0,y_0,y'_0), то в этой области существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения $y''=f(x,y,y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$.

Доказательство не приводим.

Аналогичные понятия и определения имеют место для дифференциальных уравнений n–го порядка.

Далее рассмотрим отдельные виды дифференциальных уравнений высших порядков.

3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов решения дифференциального уравнения второго порядка является ***метод понижения порядка.*** Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной данное дифференциальное уравнение сводится к уравнению первого порядка. Рассмотрим три типа уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида

$$\boxed{y''=f(x)} \tag{3.4}$$

не содержит искомую функцию и её производную. Порядок уравнения понижается путем последовательного интегрирования.

Так как $y''=(y')'=\dfrac{dy'}{dx}$, то дифференциальное уравнение (3.4) можно записать в виде $dy'=f(x)dx$. Интегрируя, получаем: $y'=\int f(x)dx$ или $y'=f_1(x)+c_1$. Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение первого порядка. Решаем его:

$$d\,y=\left(f_1(x)+c_1\right)d\,x\,,\qquad y=\int\left(f_1(x)+c_1\right)dx\,,$$

$y=f_2(x)+c_1x+c_2$ – общее решение уравнения (3.4).

Если дано уравнение $y^{(n)}=f(x)$, то, проинтегрировав его последовательно n раз, получим общее решение.

Пример 3.1. Решить уравнение $y'''=\dfrac{1}{x^3}$.

Решение. Последовательно интегрируя три раза данное уравнение, получим:

$$y''=\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}+c_1\,,$$

$$y'=\int\left(-\frac{1}{2x^2}+c_1\right)dx=\frac{1}{2x}+c_1x+c_2\,,$$

$$y=\int\left(\frac{1}{2x}+c_1x+c_2\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x|+c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3$$ – общее решение уравнения.

Пример 3.2. Найти частное решение уравнения $y''=\sin x+x$, удовлетворяющее условиям $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Решение. Интегрируем уравнение

$$y'=\int(\sin x+x)dx=-\cos x+x^2/2+c_1\,.$$

Подставляя $x=0$, $y'=1$ в это равенство, находим c_1: $1=-\cos 0+c_1$, $c_1=2$.

Отсюда $y=\int\left(-\cos x+x^2/2+2\right)dx=-\sin x+x^3/6+2x+c_2$.

Находим C_2 из начальных условий: $1=-\sin 0+c_2$, $c_2=1$.

Таким образом, $y=-\sin x+x^3/6+2x+1$ – частное решение данного уравнения.

2. Рассмотрим уравнение вида

$$\boxed{y''=f(x,y')}, \tag{3.5}$$

которое не содержит явно искомую функцию y. Порядок уравнения понижается заменой $y'=p$, где $p=p(x)$ – новая неизвестная фунция. Тогда $y''=\dfrac{dp}{dx}=p'$ и дифференциальное уравнение (3.5) принимает вид $p'=f(x,p)$, т.е. получаем уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $p(x)$. Проинтегрировав это уравнение, найдем его общее решение $p=\varphi(x,c_1)$. Так как $p=y'_x$, то для нахождения искомой функции y получим уравнение $y'_x=\varphi(x,c_1)$. Решив это уравнение первого порядка, получим общее решение исходного уравнения $y=\int\varphi(x,c_1)dx+c_2$.

Пример 3.3. Найти общее решение уравнения $\left(1+x^2\right)y''-2x\,y'=0$.

Решение. В уравнении отсутствует явно функция $y(x)$, т.е. оно имеет вид (3.5). Поэтому произведём замену $y'=p$, $y''=p'_x$. Получим уравнение

$$\left(1+x^2\right)p'-2x\,p=0,\quad\text{или}\quad\left(1+x^2\right)\frac{dp}{dx}-2x\,p=0\,.$$

Разделяя переменные, будем иметь $\frac{dp}{p}=\frac{2x\,dx}{1+x^2}$. Интегрируя, получаем:

$$\ln|\,p\,|=\ln\left(1+x^2\right)+\ln|\,c_1|,\ \text{ или } \quad p=c_1\left(1+x^2\right).$$

Так как $p=y'_x$, то $y'=c_1\left(1+x^2\right)$, или $\frac{dy}{dx}=c_1\left(1+x^2\right)$. Разделим переменные: $dy=c_1\left(1+x^2\right)dx$. Интегрируя, получим общее решение $y=c_1x+c_1x^3/3+c_2$.

Пример 3.4. Найти общее решение уравнения $y''-\frac{y'}{x}=\frac{2}{x^2}$.

Решение. Положив $y'=p$, $y''=p'_x$, получим $p'-\frac{p}{x}=\frac{2}{x^2}$ − линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решим его заменой $p=u\cdot v$, $p'=u'v+uv'$:

$$u'v+u\,v'-\frac{u\,v}{x}=\frac{2}{x^2},\ \text{ или } \quad u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=\frac{2}{x^2}.$$

Функцию $v(x)$ находим из уравнения $v'-\frac{v}{x}=0$:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x},\qquad \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},\qquad v=x.$$

Для нахождения функции u получаем уравнение $u'x=\frac{2}{x^2}$ или $u'=\frac{2}{x^3}$. Интегрируя, имеем $u=-\frac{1}{x^2}+c_1$. Следовательно, $p=u\,v=\left(-\frac{1}{x^2}+c_1\right)x$ или $p=c_1x-\frac{1}{x}$. Заменим p на y': $y'=c_1x-\frac{1}{x}$. Отсюда $y=c_1\frac{x^2}{2}-\ln|\,x\,|+c_2$ есть общее решение исходного уравнения.

3. Рассмотрим уравнение вида

$$\boxed{y''=f\left(y,y'\right)},\tag{3.6}$$

которое не содержит явно независимую переменную x.

Для понижения порядка используется снова подстановка $y'=p$, но $p=p(y)$. Найдем y'', учитывая, что $p=p(y(x))$ − сложная функция:

$$y''=\frac{d\left(y'\right)}{dx}=\frac{d\,p\left(y\right)}{dy}\cdot\frac{d\,y}{dx}=\frac{d\,p}{dy}\cdot p,\quad \text{т.е.}\quad y''=\frac{dp}{dy}p.$$

Подставляя выражения y' и y'' в уравнение (3.6), получим уравнение первого порядка $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$. Интегрируя его, найдем общее решение $p=\varphi\left(y,c_1\right)$. Заменим p на y': $y'=\varphi\left(y,c_1\right)$ − уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрировав его, найдем общий интеграл уравнения (3.6):

$$\int\frac{d\,y}{\varphi\left(y,c_1\right)}=x+c_2.$$

Пример 3.5. Найти частное решение уравнения $y''-\frac{2\left(y'\right)^2}{y-1}=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y'(0)=1$, $y(0)=2$.

Решение. Уравнение имеет вид (3.6). Пусть $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ и уравнение примет вид: $p\dfrac{dp}{dy} - \dfrac{2p^2}{y-1} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{2p}{y-1}, \qquad \frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y-1}.$$

Интегрируя его, получаем: $\ln|p| = 2\ln|y-1| + \ln|c_1|$, или $p = (y-1)^2 c_1$.

Заменяем p на y': $y' = c_1(y-1)^2$. Подставляем в это равенство начальные условия $y' = 1$, $y = 2$: $1 = c_1(2-1)^2$, $C_1 = 1$. Тогда $\dfrac{dy}{dx} = (y-1)^2$, или $\dfrac{dy}{(y-1)^2} = dx$. Интегрируя это уравнение, получим: $-\dfrac{1}{y-1} = x + c_2$. Найдем c_2 из начальных условий $-\dfrac{1}{2-1} = 0 + c_2$, $c_2 = -1$. Таким образом, $-\dfrac{1}{y-1} = x - 1$, или $y = \dfrac{1}{1-x} + 1$ − частное решение данного уравнения.

Примеры для самостоятельного решения

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $y'' = \cos 2x$ 2. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$ 3. $y\,y'' = y' + (y')^2$ 4. $x\,y'' = y' \ln(y'/x)$

Найти частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

5. $x + 2y' - xy'' = 0$, $y(1) = 1/2$, $y'(1) = 2$. 6. $1 + (y')^2 = 2y\,y''$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

Ответы: 1. $y = -(\cos 2x)/4 + c_1 x + c_2$ 2. $y = -c_1 \cos x - x + c_2$ 3. $\ln|y c_1 - 1| = c_1(x + c_2)$ 4. $y = \left(c_1 x - c_1^2\right)e^{x/c_1 + 1} + c_2$ 5. $y = x^3 - x^2/2$ 6. $y = \left(x^2 + 1\right)/2$

4. Линейные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение n-го порядка называется ***линейным***, если оно линейно относительно искомой функции y и её производных y', y'', …, $y^{(n)}$, т.е. имеет вид

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)}, \tag{4.1}$$

где $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$, $f(x)$ – заданные функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (4.1) называется ***линейным однородным*** уравнением; если $f(x) \neq 0$, то уравнение (4.1) называется ***неоднородным.***

В дальнейшем будем предполагать, что функции $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$, $f(x)$ непрерывны (на некотором интервале (a,b)). При этих условиях справедлива теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения (см. теорему 3.1).

4.1. Однородные линейные уравнения

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение (ОЛДУ) второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{4.2}$$

Установим некоторые основные свойства решений однородных уравнений.

Теорема 4.1. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются частными решениями уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, то функция $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные, есть также решение этого уравнения.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 – решения уравнения, то

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0 \quad \text{и} \quad y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0.$$

Подставим функцию $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ в уравнение (4.2) и, принимая во внимание эти тождества, получим:

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a_1(x)\cdot(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + a_2(x)\cdot(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$
$$= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + a_1(x)\cdot(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_2(x)\cdot(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$
$$= c_1\cdot\left(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right) + c_2\cdot\left(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right) = c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 = 0,$$

т.е. функция $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ есть решение уравнения.

Итак, функция $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ удовлетворяет уравнению (4.2) при любых значениях постоянных c_1, c_2. Является ли функция $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ общим решением однородного уравнения?

Для ответа на этот вопрос введем понятия линейной независимости и линейной зависимости функций.

Две функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ называются ***линейно независимыми*** на интервале (a,b), если их отношение на этом интервале не является постоянным, т.е. если $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$. В противном случае функции называются ***линейно зависимыми.***

Например, функции $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = 2e^{-x}$ – линейно зависимы:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{-x}}{2e^{-x}} = \frac{1}{2} = \text{const};$$

функции $y_1 = e^{-x}$ и $y_3 = e^{3x}$ – линейно независимы: $\dfrac{y_1}{y_3} = \dfrac{e^{-x}}{e^{3x}} = e^{-4x} \neq \text{const}$;

функции $y_4 = \cos x$ и $y_5 = \sin x$ также линейно независимы: $\dfrac{y_4}{y_5} = \dfrac{\cos x}{\sin x} \neq \text{const}$.

Пусть функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b).

Определитель
$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

называется ***определителем Вронского*** или ***вронскианом*** данных функций.

Теорема 4.2. Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно зависимы на интервале (a,b), то определитель Вронского на этом интервале тождественно равен нулю.

Доказательство. Так как функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно зависимы, то $\dfrac{y_1}{y_2} = \lambda = \text{const}$ на (a,b) или $y_1 = \lambda y_2$. Тогда

$$W(y_1;y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix}=0.$$

Теорема 4.3. Если частные решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ уравнения $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ линейно независимы на (a,b), то определитель Вронского ни в одной точке этого интервала не обращается в нуль.

Доказательство не приводим.

Из теорем 4.2 и 4.3 следует, что вронскиан не равен нулю ни в одной точке интервала (a,b) тогда и только тогда, когда частные решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы.

Совокупность двух линейно независимых на интервале (a,b) частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ ОЛДУ второго порядка называется ***фундаментальной системой решений*** этого уравнения.

Следующая теорема отвечает на вопрос: при каких условиях функция $y=c_1y_1+c_2y_2$ будет общим решением уравнения (4.2)?

Теорема 4.4 (о структуре общего решения ОЛДУ). Если два частных решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ ОЛДУ $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ образуют на интервале (a,b) фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения будет функция $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, где c_1, c_2 ─ произвольные постоянные.

Доказательство. Согласно теореме 4.1 функция $y=c_1y_1+c_2y_2$ есть решение уравнения (4.2). Докажем теперь, что каковы бы ни были допустимые начальные условия

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\qquad x_0\in(a;b), \tag{4.4}$$

можно так подобрать единственные значения произвольных постоянных c_1, c_2, чтобы соответствующее частное решение $y=c_1y_1+c_2y_2$ удовлетворяло начальным условиям.

Подставив решение $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ в начальные условия (4.4), получим систему уравнений относительно неизвестных c_1, c_2:

$$\begin{cases} y_0=c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0), \\ y_0'=c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0). \end{cases} \tag{4.5}$$

Определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

есть вронскиан функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, вычисленный в точке x_0: $\Delta=W\big(y_1(x_0);y_2(x_0)\big)$. Так как решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы, то согласно теореме 4.3 вронскиан ни в одной точке интервала (a,b) не обращается в нуль. Следовательно, система уравнений (4.5) имеет единственное решение $c_1=c_1^0$, $c_2=c_2^0$. Частное решение $y=c_1^0y_1(x)+c_2^0y_2(x)$ удовлетворяет начальным условиям (4.4).

Таким образом доказано, что функция

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{4.6}$$

есть общее решение ОЛДУ.

4.2. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим однородное линейное уравнение (ОЛДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\boxed{y''+py'+qy=0}, \tag{4.7}$$

где p и q - постоянные действительные числа.

Чтобы найти общее решение уравнения (4.7), достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему (см. теорему 4.4).

Будем искать частное решение в виде $y=e^{kx}$, где $k=\text{const}$; тогда $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$. Подставляя выражения для y, y', y'' в уравнение (4.7), получаем: $k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0$, $e^{kx}\left(k^2+pk+q\right)=0$, или

$$\boxed{k^2+pk+q=0}. \tag{4.8}$$

Следовательно, если k будет удовлетворять уравнению (4.8), то функция e^{kx} будет решением уравнения (4.7). Уравнение (4.8) называется ***характеристическим уравнением*** ДУ (4.7). Для его составления надо в уравнении (4.7) заменить y'', y', y соответственно на $k^2, k, 1$.

Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, k_1 и k_2 − его корни. Возможны следующие три случая.

Случай 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны: $k_1\neq k_2$**.** В этом случае частными решениями уравнения (4.7) будут функции $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=e^{k_2x}$. Они образуют фундаментальную систему, т.к.

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}}=e^{(k_1-k_2)x}\neq\text{const} .$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения (4.7) согласно формуле (4.6) имеет вид:

$$\boxed{y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}.} \tag{4.9}$$

Пример 4.1. Решить уравнение $y''-y'-20y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2-k-20=0$, его корни $k_1=5,\ k_2=-4$. Следовательно, общее решение данного уравнения, согласно формуле (4.9), имеет вид: $y=c_1e^{5x}+c_2e^{-4x}$, где c_1, c_2 − произвольные постоянные.

Случай 2. Корни характеристического уравнения действительные и равные: $k_1=k_2=k$**.** В этом случае имеем только одно частное решение $y_1=e^{kx}$.

Покажем, что функция $y_2=xe^{kx}$ также является решением уравнения (4.7).

Подставим y_2 в левую часть уравнения (4.7). Будем иметь:

$$y_2''+p\,y_2'+q\,y_2=\left(x e^{kx}\right)''+p\left(x e^{kx}\right)'+q\left(x e^{kx}\right)=\left(2k e^{kx}+xk^2 e^{kx}\right)+p\left(e^{kx}+xk e^{kx}\right)+q e^{kx}=$$
$$=e^{kx}\left(2k+xk^2+p+pxk+qx\right)=e^{kx}\left(x\left(k^2+pk+q\right)+\left(2k+p\right)\right).$$
Так как $k_1=k_2=k$ – корень уравнения (4.8), то $k^2+pk+q=0$. По теореме Виета $k_1+k_2=2k=-p$, $2k+p=0$. Отсюда $y_2''+p\,y_2'+q\,y_2=0$, т.е. $y_2=xe^{kx}$ есть решение уравнения (4.7).

Частные решения уравнения $y_1=e^{kx}$, $y_2=xe^{kx}$ образуют фундаментальную систему решений, т.к. $\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{e^{kx}}{xe^{kx}}=\dfrac{1}{x}\neq\mathrm{const}$. Поэтому общее решение ОЛДУ (4.7) имеет вид:
$$\boxed{y=c_1 e^{kx}+c_2\,x\,e^{kx}}\,. \tag{4.10}$$

Пример 4.2. Решить уравнение $y''+2y'+y=0$.
Решение. Характеристическое уравнение $k^2+2k+1=0$ имеет два корня $k_1=k_2=-1$. Общее решение исходного уравнения согласно формуле (4.10) запишется в виде: $y=c_1 e^{-x}+c_2 x e^{-x}$.

Случай 3. Корни характеристического уравнения комплексно сопряжённые: $k_1=\alpha+\beta i$**,** $k_2=\alpha-\beta i$**.** В этом случае частными решениями уравнения (4.7) будут комплексные функции $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$.
Используя формулы Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$, преобразуем полученные решения:
$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),$$
$$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

Для отыскания действительных решений однородного уравнения составим две линейные комбинации решений y_1 и y_2:
$$\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x=\tilde{y}_1,\qquad \frac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x=\tilde{y}_2\,.$$
Согласно теореме 4.1 функции $\tilde{y}_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\tilde{y}_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются решениями ОЛДУ (4.7). Эти решения образуют фундаментальную систему, т.к. $\dfrac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2}\neq\mathrm{const}$. Поэтому общее решение уравнения (4.7) в случае комплексных корней характеристического уравнения запишется в виде
$$\boxed{y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x} \tag{4.11}$$

Пример 4.3. Решить уравнение $y''+4y'+13y=0$.
Решение. Характеристическое уравнение $k^2+4k+13=0$ имеет комплексные корни $k_{1,2}=-2\pm3i$. По формуле (4.11) записываем общее решение исходного уравнения
$$y=c_1 e^{-2x}\cos3x+c_2 e^{-2x}\sin3x\,.$$

Пример 4.4. Найти частное решение уравнения $y''+4y'=0$, удовлетворяющее условиям $y(0)=0$, $y'(0)=-4$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2+4k=0$ есть $k_1=0$, $k_2=-4$. Общее решение уравнения имеет вид $y=c_1 e^{0x}+c_2 e^{-4x}$ или $y=c_1+c_2 e^{-4x}$ (формула (4.9)). Тогда $y'=-4c_2 y^{-4x}$. Подставляя $x=0$, $y=0$, $y'=-4$ в выражения для y и y', получаем: $\begin{cases} 0=c_1+c_2 e^0 \\ -4=-4c_2 e^0 \end{cases}$. Отсюда $c_1=-1$, $c_2=1$. Таким образом, искомое частное решение уравнения есть функция $y=-1+e^{-4x}$.

Замечание. Метод построения фундаментальной системы решений, рассмотренный нами для ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, распространяется и на уравнения того же типа, но более высокого порядка.

Покажем это на примере.

Пример 4.5. Найти общее решение уравнения $y^{IV}+y'''-2y''=0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^4+k^3-2k^2=k^2\left(k^2+k-2\right)=0$ имеет корни $k_1=k_2=0$, $k_3=-2$, $k_4=1$. Фундаментальная система решений: $y_1=e^{0x}=1$, $y_2=x$, $y_3=e^{-2x}$, $y_4=e^x$. Следовательно, функция $y=c_1+c_2 x+c_3 e^{-2x}+c_4 e^x$ – общее решение исходного уравнения.

Примеры для самостоятельного решения

Решить уравнения: 1. $y''-y'-6y=0$, 2. $y''-4y'+4y=0$, 3. $y''-2y'+5y=0$,
4. $y'''-2y''+y'=0$, 5. $y'''+16y'=0$, 6. $y^{IV}+4y''=0$.

Найти частное решение уравнений:

7. $y''+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, 8. $y''+6y'+9y=0$, $y(0)=0, y'(0)=1.$

Ответы: 1. $y=c_1 e^{-2x}+c_2 e^{3x}$, 2. $y=c_1 e^{2x}+c_2 x e^{2x}$, 3. $y=c_1 e^x\cos 2x+c_2 e^x\sin 2x$,
4. $y=c_1+c_2 e^x+c_3 x e^x$ 5. $y=c_1+c_2\cos 4x+c_3\sin 4x$,
6. $y=c_1+c_2 x+c_3\sin 2x+c_4\cos 2x$, 7. $y=\cos x$, 8. $y=xe^{-3x}$.

4.3. Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение (НЛДУ) второго порядка

$$\boxed{y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)}, \tag{4.12}$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – непрерывные на интервале (a,b) функции. Уравнение

$$\boxed{y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0}, \tag{4.13}$$

левая часть которого совпадает с левой частью уравнения (4.12), называется ***соответствующим*** *ему* ***однородным уравнением***.

Теорема 4.5 (о структуре общего решения НЛДУ).
Общее решение неоднородного уравнения $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ есть сумма его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{y}(x)$ − любое частное решение уравнения (4.12), $\bar{y}(x)$ − общее решение однородного уравнения (4.13). Докажем, что функция $y(x)=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)$ будет общим решением НЛДУ (4.12). Заметим, что $\bar{y}(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, где $y_1(x),\ y_2(x)$ − фундаментальная система решений уравнения (4.13). Подставим $\tilde{y}(x)$ в уравнение (4.12), а $\bar{y}(x)$ в уравнение (4.13). Получим

$$\tilde{y}''+a_1(x)\tilde{y}'+a_2\tilde{y}=f(x) \quad \text{и} \quad \bar{y}''+a_1(x)\bar{y}'+a_2\bar{y}=0.$$

Складывая эти равенства, получим $(\tilde{y}+\bar{y})''+a_1(x)\cdot(\tilde{y}+\bar{y})'+a_2(\tilde{y}+\bar{y})=f(x)$, т.е. $\tilde{y}+\bar{y}$ есть решение НЛДУ. Это решение зависит от двух произвольных постоянных, т.к. $\bar{y}=c_1y_1+c_2y_2$.

Докажем теперь, что каковы бы ни были начальные условия

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0', \tag{4.14}$$

можно подобрать единственным образом произвольные постоянные c_1 и c_2, входящие в функцию $y(x)=\tilde{y}(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ так, чтобы частное решение удовлетворяло заданным начальным условиям.

Подставив функцию $y(x)$ в начальные условия (4.14), получим систему уравнений относительно неизвестных c_1 и c_2:

$$\begin{cases} y_0=\tilde{y}(x_0)+c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0), \\ y_0'=\tilde{y}'(x_0)+c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y_0-\tilde{y}(x_0), \\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=y_0'-\tilde{y}'(x_0). \end{cases}$$

Определитель этой системы отличен от нуля (см. теорему 4.3). Следовательно, система уравнений имеет единственное решение $c_1=c_1^0,\ c_2=c_2^0$.

Решение $y=\tilde{y}(x)+c_1^0y_1(x)+c_2^0y_2(x)$ является частным решением уравнения (4.12), удовлетворяющим заданным начальным условиям. Теорема доказана.

4.4. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим общий метод нахождения частных решений НЛДУ (4.12). Его общее решение определяется формулой $y=\tilde{y}+\bar{y}$ (см. п. 4.3). Частное решение $\tilde{y}$ уравнения (4.12) можно найти методом вариации произвольных постоянных.

Пусть $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ − общее решение однородного уравнения (4.13), где $y_1(x),\ y_2(x)$ − линейно независимые частные решения ОЛДУ. Решение НЛДУ будем искать в аналогичном виде, заменив константы c_1, c_2 на функции $c_1(x), c_2(x)$, т.е. в виде

$$y(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x), \tag{4.15}$$

где $c_1(x), c_2(x)$ – неизвестные пока функции. Найдем производную

$$y'(x)=c_1(x)y_1'(x)+c_2(x)y_2'(x)+c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x).$$

Подберём функции $c_1(x), c_2(x)$ так, чтобы они удовлетворяли условию

$$c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0. \tag{4.16}$$

Тогда

$$y'(x)=c_1(x)y_1'(x)+c_2(x)y_2'(x),$$
$$y''(x)=c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)+c_1'(x)y_1''(x)+c_2'(x)y_2''(x).$$

Подставляя выражения для y, y', y'' в уравнение (4.12), получим:

$$\left(c_1'y_1'+c_2'y_2'+c_1'y_1''+c_2'y_2''\right)+a_1\left(c_1y_1'+c_2y_2'\right)+a_2\left(c_1y_1+c_2y_2\right)=f(x) \quad \text{или}$$

$$c_1\left(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1\right)+c_2\left(y_2''+a_1y_2'+a_2y_2\right)+c_1'y_1'+c_2'y_2'=f(x).$$

В последнем равенстве выражения в скобках тождественно равны нулю, т.к. y_1 и y_2 – решения однородного уравнения (4.13), поэтому равенство примет вид

$$c_1'(x)\,y_1'(x)+c_2'(x)\,y_2'(x)=f(x). \tag{4.17}$$

Таким образом, функция $y(x)=c_1(x)\,y_1(x)+c_2(x)\,y_2(x)$ будет решением НЛДУ (4.12), если функции $c_1(x)$, $c_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений (4.16) и (4.17):

$$\boxed{\begin{cases} c_1'(x)\,y_1(x)+c_2'(x)\,y_2(x)=0,\\ c_1'(x)\,y_1'(x)+c_2'(x)\,y_2'(x)=f(x).\end{cases}} \tag{4.18}$$

Так как определитель этой системы является определителем Вронского для линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, то он не равен нулю; следовательно, система имеет единственное решение: $c_1'(x)=\varphi_1(x)$, $c_2'(x)=\varphi_2(x)$. Интегрируя эти уравнения, находим $c_1(x), c_2(x)$, а затем решение $y(x)=c_1(x)\,y_1(x)+c_2(x)\,y_2(x)$ уравнения (4.12).

Пример 4.6. Найти решение уравнения $y''+4y=4\operatorname{ctg}2x$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+4y=0$. Имеем $k^2+4=0$, $k_1=2i$, $k_2=-2i$. Фундаментальная система решений $y_1=\cos 2x$, $y_2=\sin 2x$. Общее решение ОЛДУ $\bar{y}=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде (4.15): $y=c_1(x)\,y_1(x)+c_2(x)\,y_2(x)$. Для нахождения $c_1(x), c_2(x)$ составим систему уравнений вида (4.18):

$$\begin{cases} c_1'(x)\,\cos 2x+c_2'(x)\,\sin 2x=0,\\ c_1'(x)\,(-2\sin 2x)+c_2'(x)\,(2\cos 2x)=4\operatorname{ctg}2x.\end{cases}$$

Умножив первое уравнение системы на $2\sin 2x$, второе ─ на $\cos 2x$ и сложив, получим

$$2c_2'(x)=4\operatorname{ctg}2x\cdot\cos 2x, \text{ или } c_2'(x)=\frac{2\cos^2 2x}{\sin 2x}.$$

Подставляя найденное выражение $c_2'(x)$ в первое уравнение системы, находим $c_1'(x)=-2\cos 2x$. Тогда $c_1(x)=-2\int\cos 2x\,dx=-\sin 2x+\bar{c}_1$,

$$c_2(x)=2\int\frac{\cos^2 2x}{\sin 2x}\,dx=2\int\frac{1-\sin^2 2x}{\sin 2x}\,dx=\ln\left|\operatorname{tg}x\right|+\cos 2x+\bar{c}_2$$

и общее решение $y=c_1(x)\,y_1(x)+c_2(x)\,y_2(x)$ исходного уравнения примет вид

$$y=\left(-\sin 2x+\bar{c}_1\right)\cos 2x+\left(\ln\left|\operatorname{tg}x\right|+\cos 2x+\bar{c}_2\right)\sin 2x \quad \text{или}$$

$y=\left(\bar{c}_1\cos 2x+\bar{c}_2\sin 2x\right)+\ln\left|\operatorname{tg}x\right|\cdot\sin 2x$, где $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$ - произвольные постоянные.

Обратите внимание, что в скобке − общее решение ОЛДУ, а второе слагаемое – частное решение НЛДУ.

Теорема 4.6 (о суперпозиции решений). Если правая часть уравнения $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ есть сумма двух функций: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, а $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ – частные решения уравнений $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_1(x)$ и $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_2(x)$ соответственно, то функция $\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2$ является частным решением данного уравнения.

Доказательство. Подставим функцию $\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2$ в уравнение (4.12):

$$(\tilde{y}_1+\tilde{y}_2)''+a_1(x)\cdot(\tilde{y}_1+\tilde{y}_2)'+a_2(x)\cdot(\tilde{y}_1+\tilde{y}_2)=$$
$$=(\tilde{y}_1''+a_1(x)\tilde{y}_1'+a_2(x)\tilde{y}_1)+(\tilde{y}_2''+a_1(x)\tilde{y}_2'+a_2(x)\tilde{y}_2)=f_1(x)+f_2(x)=f(x).$$

Теорема доказана.

Примеры для самостоятельного решения

Решить уравнения: 1. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$; 2. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

Ответы: 1. $y=e^x(c_1+c_2x-x+x\ln|x|)$, 2. $y=c_1\cos x+c_2\sin x-x\cdot\cos x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$.

4.5. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{4.19}$$

где p и q – действительные числа. Частное решение уравнения (4.19) можно найти методом, рассмотренным в п.4.4.

Если правая часть $f(x)$ НЛДУ (4.19) имеет “специальный вид”, то частное решение $\tilde{y}$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. Суть метода состоит в следующем. Частное решение записывают в виде, похожем на функцию $f(x)$, но с неопределенными коэффициентами; затем подставляют в уравнение и определяют значения коэффициентов.

Рассмотрим два случая.

Случай I. Правая часть уравнения (4.19) имеет вид: $\boxed{f(x)=P(x)\cdot e^{\alpha x}}$, где $P(x)$ – многочлен, $\alpha\in R$. В этом случае частное решение $\tilde{y}$ уравнения можно искать в виде

$$\boxed{\tilde{y}(x)=Q(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x^r}, \tag{4.20}$$

где $Q(x)$ – многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами, r – число, равное кратности α как корня характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q(x)$, надо подставить выражение $\tilde{y}(x)$ в уравнение (4.19).

Пример 4.7. Решить уравнение $y''-4y=-5e^{3x}$.

Решение. Общее решение НЛДУ имеет вид: $y=\tilde{y}+\bar{y}$. Найдем общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения $y''-4y=0$. Характеристическое уравнение $k^2-4=0$ имеет корни $k_1=2$, $k_2=-2$. Следовательно, $\bar{y}=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$.

Найдем частное решение $\tilde{y}$ НЛДУ. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = -5e^{3x}$. Так как $\alpha = 3$ не является корнем характеристического уравнения, а $P(x) = -5$ – многочлен нулевой степени, то по формуле (4.20) частное решение ищем в виде $\tilde{y} = A\,e^{3x}x^0$. Тогда $\tilde{y}' = 3Ae^{3x}$, $\tilde{y}'' = 9Ae^{3x}$. Подставляя y, y', y'' в исходное уравнение, получаем:

$$9Ae^{3x} - 4Ae^{3x} = -5e^{3x}, \text{ или } 5Ae^{3x} = -5Ae^{3x}, \text{ откуда } A = -1.$$

Следовательно, частным решением является функция $\tilde{y} = -e^{3x}$, а общим решением – функция $y = \bar{y} + \tilde{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - e^{3x}$.

Пример 4.8. Найти решение уравнения $y'' + 2y' = 4x + 8$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Решение. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид: $y = \bar{y} + \tilde{y}$. Находим решение $\bar{y}$ однородного уравнения $y'' + 2y' = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k = 0$ имеет корни $k_1 = 0,\ k_2 = -2$. Следовательно, общее решение ОЛДУ будет $\bar{y} = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-2x} = c_1 + c_2 e^{-2x}$.

Найдем частное решение $\tilde{y}$ НЛДУ. Правая часть уравнения $f(x) = 4x + 8 = (4x+8)e^{0x}$. Число $\alpha = 0$ есть простой корень характеристического уравнения $(\alpha = k_1 = 0)$. Следовательно, по формуле (4.20) частное решение будем искать в виде $\tilde{y} = (Ax + B)e^{0x}x = Ax^2 + Bx$. Тогда $\tilde{y}' = 2Ax + B$, $\tilde{y}'' = 2A$. Подставляя y, y', y'' в исходное уравнение, будем иметь:

$$2A + 2(2Ax + B) = 4x + 8, \text{ или } 4Ax + 2A + 2B = 4x + 8.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим: $4A = 4$, $2A + 2B = 8$, откуда $A = 1,\ B = 3$. Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид: $\tilde{y} = x^2 + 3x$. Общим решением является функция

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = c_1 + c_2 e^{-2x} + x^2 + 3x.$$

Подставляя найденное решение в начальные условия $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, получим систему уравнений: $\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 e^0 \\ -1 = -2c_2 e^0 + 3 \end{cases}$. Откуда $c_1 = -1,\ c_2 = 2$.

Следовательно, искомое решение, удовлетворяющее начальным условиям, есть $y = -1 + 2e^{-2x} + x^2 + 3x$.

Случай II. Пусть правая часть ДУ (4.19) имеет вид: $\boxed{f(x) = e^{\alpha x}\left(P_1 \cos\beta x + P_2 \sin\beta x\right)}$, где $P_1,\ P_2$ – заданные числа, $\alpha, \beta \in R$. В этом случае частное решение $\tilde{y}(x)$ неоднородного ДУ можно найти в виде

$$\boxed{\tilde{y} = x^r \cdot e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x),} \qquad (4.21)$$

где A и B – неопределённые коэффициенты, r – число, равное кратности $\alpha + \beta\, i$, как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

Замечания:

1. Формула (4.21) частного решения $\tilde{y}(x)$ не меняется, если в правой части уравнения (4.19) выражение содержит только $\cos\beta x$ или только $\sin\beta x$, т.е. или

$P_1=0$ или $P_2=0$.

2. Если правая часть ДУ (4.19) есть сумма функций вида *I* и *II*, то для нахождения частного решения $\tilde{y}(x)$ следует применить теорему 4.6.

Пример 4.9. Решить уравнение $y''-2y'+5y=17\sin 2x$.

Решение. Общее решение НЛДУ имеет вид: $y=\bar{y}+\tilde{y}$. Найдем общее решение однородного уравнения $y''-2y'+5y=0$. Характеристическое уравнение $k^2-2k+5=0$ имеет корни $k_1=1+2i,\quad k_2=1-2i.$ Следовательно,

$$\bar{y}=c_1e^x\cos 2x+c_2e^x\sin 2x.$$

Найдём частное решение $\tilde{y}$. Функция в правой части уравнения имеет вид: $f(x)=e^{0\cdot x}(0\cos 2x+17\sin 2x)$. Так как $\alpha=0,\ \beta=2,\ \alpha+i\beta=0+i2$ не совпадает с корнем характеристического уравнения, то по формуле (4.22) частное решение будем искать в виде $\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$. Тогда

$$\tilde{y}'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,\ \tilde{y}''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, получим:

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-2(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)+5(A\cos 2x+B\sin 2x)=17\sin 2x,$$

или $(-4A-4B+5A)\cos 2x+(-4B+4A+5B)\sin 2x=17\sin 2x$.

Отсюда имеем: $\begin{cases}A-4B=0\\ B+4A=17.\end{cases}$ Следовательно, $A=4,\ B=1$ и частное решение есть функция $\tilde{y}=4\cos 2x+\sin 2x$. Таким образом, искомое общее решение НЛДУ есть

$$y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+4\cos 2x+\sin 2x.$$

Пример 4.10. Решить уравнение $y''+y=4\cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_1=i,\ k_2=-i$. Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения является функция $\bar{y}=c_1\cos x+c_2\sin x$. Правая часть НЛДУ имеет вид: $f(x)=e^{0\cdot x}(4\cos x+0\sin x)$. Здесь $\alpha=0,\ \beta=1,\ \alpha+i\beta=i$. Это число совпадает с одним корнем характеристического уравнения. Поэтому по формуле (4.21) частное решение будем искать в виде $\tilde{y}=(A\cos x+B\sin x)x$ (в формуле (4.21) взять $r=1$).

Найдём $\tilde{y}'=(A+Bx)\cos x+(B-Ax)\sin x,\ \tilde{y}''=(2B-Ax)\cos x+(-2A-Bx)\sin x$. Подставив $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, получим:

$$(2B-Ax)\cos x+(-2A-Bx)\sin x+x(A\cos x+B\sin x)=4\cos x,$$

$$(2B-Ax+Ax)\cos x+(-2A-Bx+Bx)\sin x=4\cos x\quad\text{или}\quad 2B\cos x-2A\sin x=4\cos x.$$

Отсюда $2B=4$, $-2A=0$ или $A=0$, $B=2$.

Следовательно, частным решением уравнения является функция $\tilde{y}=2x\sin x$, а общим решением $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+2x\sin x$.

Пример 4.11. Написать частное решение с неопределенными коэффициентами для дифференциальных уравнений:

а) $y''+y'-6y=e^{2x}-3$, б) $y''-2y'+y=2xe^x+e^x\sin 2x$, в) $y''+4y=5\cos x-2\sin 3x$.

Решение. а). Характеристическое уравнение $k^2+k-6=0$ имеет корни $k_1=2$, $k_2=-3$. Правая часть уравнения представляет собой сумму двух функций

$f_1(x)=e^{2x}$ и $f_2(x)=-3$. Согласно теореме 4.6, частным решением исходного уравнения будет функция $\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2$, где $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ есть частные решения неоднородных уравнений $y''+y'-6y=e^{2x}$ и $y''+y'-6y=-3$, соответственно.

Функция $f_1(x)=e^{2x}$ имеет вид: $P(x)e^{\alpha x}$, поэтому решение $\tilde{y}_1$, согласно формуле (4.20), ищем в виде $\tilde{y}_1=Ae^{2x}x^r$. Так как $\alpha=2$ есть простой корень характеристического уравнения, то $r=1$ и $\tilde{y}_1=Ae^{2x}x$.

Функция $f_2(x)=-3e^{0x}$ имеет тот же вид: $P(x)e^{\alpha x}$. Так как $\alpha=0$ не является корнем характеристического уравнения, то в формуле (4.20) надо взять $r=0$. Тогда $\tilde{y}_2(x)=Be^{0\cdot x}x^0$ или $\tilde{y}_2(x)=B$ и частное решение исходного уравнения будет иметь вид: $\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2=xAe^{2x}+B$.

б). Корни характеристического уравнения $k^2-2k+1=0$ есть $k_1=k_2=1$. Рассмотрим два уравнения (см. теорему 4.6): $y''-2y'+y=2xe^x$ и $y''-2y'+y=e^x\sin 2x$. Функция $f_1(x)=2xe^{1\cdot x}$, поэтому решение $\tilde{y}_1$ ищем в виде $\tilde{y}_1=(Ax+B)e^{1\cdot x}x^r$ (формула (4.20)). Так как $\alpha=1$ – двукратный корень характеристического уравнения, то $r=2$. Значит $\tilde{y}_1=(Ax+B)e^x x^2$.

Функция $f_2(x)=e^x\sin 2x$ или $f_2(x)=e^x\cdot(0\cos 2x+\sin 2x)$, следовательно, решение второго уравнения $\tilde{y}_2$ согласно формуле (4.21) будем искать в виде $\tilde{y}_2=e^x\left(C\cdot\cos 2x+D\cdot\sin 2x\right)x^r$. Так как $\alpha=1$, $\beta=2$, то $\alpha+i\beta=1+2i$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому $r=0$ и $\tilde{y}_2=e^x(C\cos 2x+D\sin 2x)$. Частным решением исходного уравнения будет функция $\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2=x^2(Ax+B)e^x+e^x(C\cos 2x+D\sin 2x)$.

в). Характеристическое уравнение $k^2+4=0$ имеет корни $k_1=2i,\ k_2=-2i$. Правая часть данного ДУ содержит $\cos x$ и $\sin 3x$, которые зависят от разных аргументов. Рассмотрим уравнения $y''+4y=5\cos x$ и $y''+4y=-2\sin 3x$. Функция в правой части первого уравнения имеет вид: $f_1(x)=e^{0\cdot x}(5\cos x+0\cdot\sin x)$. Согласно формуле (4.21) частное решение $\tilde{y}_1$ ищем в виде $\tilde{y}_1=e^{0\cdot x}(A\cos x+B\sin x)x^r$. Так как $\alpha=0,\ \beta=1,\ \alpha+i\beta=i$ не является корнем характеристического уравнения, то $r=0$ и $\tilde{y}_1=A\cos x+B\sin x$.

Функция $f_2(x)=-2\sin 3x$ или $f_2(x)=e^{0\cdot x}(0\cos 3x-2\sin 3x)$. Учитывая, что $\alpha+i\beta=3i$ не является корнем характеристического уравнения, в формуле (4.21) полагаем $r=0$ и решение $\tilde{y}_2$ запишем в виде $\tilde{y}_2=C\cos 3x+D\sin 3x$. Таким образом, общий вид частного решения исходного уравнения есть

$$\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2=A\cos x+B\sin x+C\cos 3x+D\sin 3x.$$

Примеры для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $y''-16y=x^2$; 2. $y''-2y'+y=e^x$; 3. $y''+y'-2y=\sin 2x$; 4. $y''-4y'=2-x$.

Написать частные решения с неопределенными коэффициентами:

5. $y''+4y'+4y=x^2e^{-2x}$ 6. $y''-4y'+5=3e^{2x}\sin x$, 7. $y''+2y'+y=xe^{-2x}-\cos x$.

Ответы: 1. $y=c_1e^{4x}+c_2e^{-4x}-x^2/16-1/128$, 2. $y=e^x\left(c_1+c_2x+x^2/2\right)$,

3. $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}-\frac{3}{20}\sin 2x-\frac{1}{20}\cos 2x$, 4. $y=c_1+c_2e^{4x}+x^2/8-7x/16$,

5. $\tilde{y}=x^2e^{-2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$, 6. $\tilde{y}=xe^{2x}(A\cos x+B\sin x)$, 7. $\tilde{y}=e^{-2x}(Ax+B)+C\cos x+D\sin x$.

Глава 2. Ряды

5. Числовые ряды

5.1. Основные понятия

Выражение вида
$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \tag{5.1}$$
называется ***числовым рядом,*** где $u_1, u_2,...,u_n,...$ − действительные или комплексные числа, называемые ***членами ряда***, u_n − ***общий член*** ряда.

Сумма первых n членов ряда называется n-й ***частичной суммой*** ряда и обозначается S_n, т.е. $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

Если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда имеет конечный предел S при $n\to\infty$, то ряд называется ***сходящимся,*** число $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ называют ***суммой ряда***. Если $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, то говорят, что ряд (1.1) ***расходится***. Такой ряд суммы не имеет.

Пример 5.1. Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n = a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+..., \quad (a\neq 0). \tag{5.2}$$
Члены ряда (5.2) есть члены геометрической прогрессии, сумма n первых членов которой находится по формуле $S_n=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a}{1-q}-\dfrac{aq^n}{1-q}$, $q\neq 1$.

1). Если $|q|<1$, то $q^n\to 0$ при $n\to\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$, ряд (5.2) сходится и его сумма равна $\dfrac{a}{1-q}$.

2). Если $|q|>1$, то $q^n\to\infty$ при $n\to\infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, ряд (5.2) расходится.

3). Если $q=1$, то ряд (5.2) принимает вид $a+a+a+...$. В этом случае $S_n=n\cdot a$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, т.е. ряд расходится.

4). Если $q=-1$, то ряд (5.2) принимает вид $a-a+a-a+...$. В этом случае $S_n=0$ при четном n и $S_n=a$ при нечетном n. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует, ряд расходится.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$.

Например, ряд $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+...$ есть ряд, составленный из членов геометрической прогрессии при $a=2$ *и* $q=1/3<1$. Следовательно, ряд сходится и его сумма
$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{2}{1-1/3}=3.$$

Пример 5.2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Общий член ряда $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$. Для удобства вычисления частичной суммы перепишем его в виде $u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Тогда:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, т.е. ряд сходится и его сумма равна 1.

Рассмотрим некоторые свойства рядов.

Свойство 1. Если ряд (5.1) сходится и его сумма равна S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cu_1+cu_2+cu_3+...+cu_n+... \text{ (с – произвольное число)} \qquad (5.3)$$

также сходится и его сумма равна $c\cdot S$.

Доказательство. Обозначим n-ю частичную сумму ряда (5.1) через S_n, а ряда (5.3) через δ_n. Тогда

$$\delta_n=cu_1+cu_2+...+cu_m=c(u_1+u_2+...+u_n)=c\cdot S_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}c\cdot S_n=c\cdot\lim_{n\to\infty}S_n=c\cdot S\ .$$

Следовательно, ряд (5.3) сходится и его сумма равна $c\cdot S$.

Свойство 2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся и их суммы соответственно равны U и V, то сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ и их суммы соответственно равны $U\pm V$.

Свойство 3. Если к ряду (5.1) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (5.1) сходятся или расходятся одновременно.

Свойства 2, 3 доказываются аналогично свойству 1.

Ряд $u_{n+1}+u_{n+2}+...=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$ называется n-м ***остатком ряда*** (5.1). Он получается из ряда (5.1) путем отбрасывания n первых его членов.

Ряд (5.1) и его остаток, согласно свойству 3, одновременно сходятся или расходятся.

Из этого же свойства следует, что если ряд (5.1) сходится, то при $n\to\infty$ его остаток стремится к нулю. Действительно, в случае сходимости ряда (5.1) имеем: $S=S_n+R_n$, где $R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+...$, или $R_n=S-S_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=S-\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S-S=0$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти сумму ряда: 1. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+2)}+...$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$.

Ответы: 1. $S=0{,}75$, 2. $S=1{,}5$.

5.2. Необходимый признак сходимости

Установить сходимость или расходимость ряда путем вычисления $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (как это сделано в примерах 5.1, 5.2) во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда используют специальные ***признаки сходимости***.

Теорема 5.1 (необходимый признак сходимости**).** Если ряд сходится, то предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Тогда, учитывая, что $u_n = S_n - S_{n-1}$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Следствие (достаточное условие расходимости ряда). Если предел n-го члена ряда отличен от нуля или не существует, то ряд расходится.

Действительно, если бы ряд сходился, то, согласно теореме 5.1, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, что противоречит условию. Следовательно, ряд расходится.

Пример 5.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{5n+3}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{5n+3} = \dfrac{3}{5} \neq 0$, поэтому по достаточному условию расходимости данный ряд расходится.

Пример 5.4. Исследовать сходимость ряда

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \ldots .$$

Решение. Так как по второму замечательному пределу $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$, то ряд расходится.

Следует отметить, что теорема 5.1 дает необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то из этого еще не следует, что ряд сходится. В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots , \tag{5.4}$$

называемый ***гармоническим***. Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Однако этот ряд является расходящимся. Покажем это. Запишем сумму первых $2n$ и n членов ряда:

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}, \qquad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Найдем разность $S_{2n} - S_n = \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$, в которой каждое слагаемое заменим наименьшим, равным $\dfrac{1}{2n}$. Получим $S_{2n} - S_n > \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n} + \ldots + \dfrac{1}{2n} = n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$, или $S_{2n} - S_n > \dfrac{1}{2}$. Теперь предположим, что ряд (5.4) сходится, тогда

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Переходя к пределу в неравенстве, получим, что $S - S > 1/2$, или $0 > \frac{1}{2}$. Пришли к противоречию, следовательно предположение о сходимости ряда (5.4) неверно, т.е. гармонический ряд расходится.

Примеры для самостоятельного решения

Доказать, что ряды расходятся.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{100n-1}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n}+30}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt{n}+10}$.

5.3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Рассмотрим некоторые достаточные признаки сходимости для ***знакоположительных*** рядов, т.е. рядов с неотрицательными членами (ряд с отрицательными членами превращается в знакоположительный путем умножения на (-1), что, согласно свойствам рядов, не влияет на сходимость ряда).

Теорема 5.2 (признак сравнения).

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Если для всех n выполняется неравенство

$$u_n \le v_n \ , \tag{5.5}$$

то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,

из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Доказательство. Обозначим $n-$е частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ соответственно через s_n и δ_n , причем $s_n \le \delta_n$ в силу условия (5.5). Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \delta$ и $\delta_n < \delta$, так как члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ положительны. Последовательность частичных сумм $s_1, s_2, ..., s_n$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ является возрастающей (с ростом n увеличивается сумма n положительных слагаемых) и ограниченной $(s_n \le \delta_n < \delta)$. Следовательно, последовательность $\{ s_n \}$ имеет конечный предел, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, тогда, по вышедоказанному, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Получили противоречие.

Пример 5.5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot 3^n}$.

Решение. Сравним данный ряд с геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$. Прогрессия сходится $\left(q=\frac{1}{3},\ q<1\right)$. Так как $\dfrac{1}{n\cdot 3^n} \le \dfrac{1}{3^n}$, то и данный ряд сходится.

Пример 5.6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Так как $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$ (при $n \ge 2$), а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ расходится.

Теорема 5.3 (предельный признак сравнения). Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ – ряды с положительными членами и существует конечный, отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k$, то ряды одновременно сходятся или расходятся.

Доказательство. По определению предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - k\right| < \varepsilon$ для любого $n > N$, откуда $(k-\varepsilon)\cdot v_n < u_n < (k+\varepsilon)\cdot v_n$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (k+\varepsilon)\cdot v_n$ и в силу признака сравнения (теорема 5.2) будет сходиться ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Аналогично, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (k-\varepsilon)\cdot v_n$ и сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Таким образом, из сходимости одного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость другого из этих рядов. Утверждение теоремы о расходимости рядов доказывается аналогично.

Пример 5.7. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n^2+1}$.

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{2n^2+1} : \dfrac{1}{n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n^2+1} = \dfrac{1}{2} \ne 0$, то данный ряд так же, как и гармонический, расходится.

Пример 5.8. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{2n}$.

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:
$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right):\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}\neq 0$. Отсюда из расходимости гармонического ряда следует расходимость исходного ряда.

Теорема 5.4 (признак Даламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$. Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.

Доказательство не приводим.

Пример 5.9. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$.

Решение. Вычислим предел

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{(n+1)!}:\frac{2n+1}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)\cdot n!}{(2n+1)\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3/n}{2+1/n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1\cdot 0=0\ .$$

Так как $l<1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится.

Пример 5.10. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)^2}$.

Решение. Вычислим предел

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+2)^2}:\frac{3^n}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot(n+1)^2}{3^n\cdot(n+2)^2}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2=3\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=3\ .$$

Так как $l>1$, то по признаку Даламбера ряд расходится.

Пример 5.11. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\operatorname{tg}\left(\pi/2^n\right)$.

Решение. Так как $\lim_{n\to\infty}\pi/2^n=0$, то $\pi/2^n$ бесконечно малая функция и $\operatorname{tg}\left(\pi/2^n\right)\sim\pi/2^n$.

Тогда $l=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\operatorname{tg}\left(\pi/2^{n+1}\right)}{n\cdot\operatorname{tg}\left(\pi/2^n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\left(\pi/2^{n+1}\right)}{n\cdot\left(\pi/2^n\right)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1$; ряд сходится.

Замечание. Если $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, то следует использовать другие признаки сходимости.

Теорема 5.5 (интегральный признак Коши). Пусть члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ являются значениями некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1=f(1),\ u_2=f(2),\dots,\ u_n=f(n),\dots$. Тогда

1) если $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$;

2) если $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится.

Доказательство не приводим.

Пример 5.12. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{1}{x^p}$ непрерывна, убывает при $x\ge 1$. Если $p\ne 1$, то

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1;\\ \infty, & p<1.\end{cases}$$

Если $p=1$, то $u_n=\frac{1}{n}$, то есть имеем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$. Этот ряд называют ***обобщенным гармоническим рядом***.

Пример 5.13. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{(x+1)\cdot\ln(x+1)}$, которая удовлетворяет условию теоремы 5.5.

Так как $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\ln\left|\ln(x+1)\right|\Big|_1^b=\infty$, т.е. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$ расходится, то по интегральному признаку данный ряд также расходится.

Пример 5.14. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$ непрерывна и монотонно убывает при $x\ge 2$. Несобственный интеграл $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^b\right)=\frac{1}{\ln 2}$ является сходящимся, следовательно, исходный ряд сходится.

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$. 2. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n}{3n^3+2n^2-2}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^4}}$

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера:

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin\frac{1}{n}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n^2+1}$.

Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака:

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$

Ответы: 1. Сходится. 2. Сходится. 3. Расходится. 4. Расходится. 5. Сходится. 6. Расходится. 7. Сходится. 8. Расходится. 9. Расходится. 10. Сходится.

5.4. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды

Знакочередующимся рядом называется ряд вида:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \quad (5.6)$$

где $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ положительны.

Теорема 5.6 (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится. Сумма ряда S положительна и не превосходит первого члена:

$$\boxed{0 < S < u_1}. \quad (5.7)$$

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму четного числа членов ряда при $n = 2k$: $S_{2k} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + u_{2k-1} - u_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + ... + (u_{2k-1} - u_{2k})$.

Из условия теоремы следует, что выражение в каждой скобке положительно. Значит, $S_{2k} > 0$ и возрастает с ростом $2k$, так как увеличивается число положительных скобок. Запишем сумму S_{2k} в виде

$$S_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - ... - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k},$$

откуда видно, что $S_{2k} < u_1$. Таким образом, последовательность $S_2, S_4, S_6, ...$ имеет предел $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S$, причём $0 < S < u_1$.

Теперь рассмотрим частичную сумму S_n нечётного числа членов рядов при $n = 2k+1$. Очевидно, что $S_{2k+1} = S_{2k} + u_{2k+1}$. Так как по условию теоремы $\lim_{k\to\infty} u_{2k+1} = 0$, то $\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} u_{2k+1} = S + 0 = S$. Таким образом, при любом n (чётном или нечётном) существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд сходится, причём $0 < S < u_1$.

Замечания:

1. Теорема 5.6 справедлива, если неравенства $u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$ выполняются, начиная с некоторого номера k.

2. Исследование знакочередующегося ряда вида $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - ...$ сводится путем умножения его на (-1) к исследованию ряда (5.6).

Отметим важное следствие из теоремы Лейбница:

Следствие. Ошибка при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена.

Действительно, сумму S сходящегося ряда можно записать в виде $S = S_n + R_n$, где $R_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + ...)$ – остаток ряда. Остаток ряда есть также знакочередующийся ряд, причем $|R_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + ... \le u_{n+1}$.

Таким образом, заменяя сумму ряда S его частичной суммой, допускаем ошибку, величина которой меньше модуля первого из отброшенных членов.

Пример 5.15. Исследовать на сходимость ряд $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+...$.

Решение. Члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>...>\frac{1}{2n-1}>...$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$. Значит ряд по признаку Лейбница сходится и его сумма $S<1$.

Пример 5.16. Вычислить приближённо сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 3^n}$, заменив её суммой четырёх членов; оценить ошибку.

Решение. $S\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 3^3}-\frac{1}{4\cdot 3^4}\approx 0,286$. Допускаемая ошибка при замене S на S_4 меньше, чем $\frac{1}{5\cdot 3^5}=\frac{1}{1215}<0,001$.

Пример 5.17. Вычислить с точностью до 0,001 сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$.

Решение. Так как $\frac{1}{n!}<10^{-3}$ при $n=7$ $\left(\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}<10^{-3}\right)$, то

$$S\approx S_6=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}\approx 0,622 .$$

Ряд $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$, члены которого имеют произвольный знак ($u_n>0$ либо $u_n<0$), называется ***знакопеременным.*** Знакочередующийся ряд есть частный случай знакопеременного ряда.

Например, ряд $\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{3^2}+\frac{\sin 4}{4^2}-...+\frac{\sin n}{n^2}+...$ есть знакопеременный ряд.

Теорема 5.7 (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). Если ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда сходится, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство не приводим.

Пример 5.18. Исследовать сходимость знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$.

Решение. Запишем ряд из модулей членов данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$. Так как $\frac{|\sin n|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходящийся, то по признаку сравнения (теорема 5.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ сходится. Согласно теореме 5.7 исходный ряд тоже сходится.

Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Пример 5.19. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Решение. Запишем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ из модулей членов исходного ряда. Сравнивая его с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ по предельному признаку, получаем: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-1}:\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ расходится (см. теорему 5.3).

Так как данный ряд знакочередующийся, члены его монотонно убывают по абсолютной величине $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\ldots>\frac{1}{2n-1}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$, то по признаку Лейбница ряд сходится. Так как исходный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то исходный ряд сходится условно.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов существенно отличаются. Абсолютно сходящиеся ряды можно складывать, перемножать, переставлять местами члены ряда. Условно сходящиеся ряды такими свойствами не обладают.

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать сходимость рядов с помощью признака Лейбница:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2n}{3n+1}$.

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3n^4-n+1}$. 4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^n}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{2n+1}$

Вычислить с точностью до 0,01 сумму ряда:

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot n^2}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$.

Ответы: 1. Сходится. 2. Расходится. 3. Сходится абсолютно. 4. Сходится условно. 5. Сходится абсолютно. 6. Сходится условно. 7. $S\approx 0,61$. 8. $S\approx -0,40$.

6. Степенные ряды

6.1. Функциональные ряды

Ряд, членами которого являются функции от x, называется ***функциональным:***

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{6.1}$$

Придавая x определенное значение x_0, получаем числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots,$$

который может как сходиться, так и расходиться.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется ***точкой сходимости*** ряда (6.1); если ряд расходится, то x_0 – ***точка расходимости*** ряда (6.1).

Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его ***областью сходимости***.

В области сходимости ряда его сумма является некоторой функцией от x:

$S = S(x)$. Она определяется равенством $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$ – частичная сумма ряда.

Среди функциональных рядов особую роль играют ***степенные*** ряды, т.е. ряды, членами которых являются степенные функции:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,, \tag{6.2}$$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \,. \tag{6.3}$$

Числа $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ называют коэффициентами ряда.

С помощью замены $x - x_0 = t$ ряд (6.3) приводится к ряду (6.2). Поэтому при изучении степенных рядов достаточно ограничиться рядами вида (6.2).

6.2. Сходимость степенных рядов

Область сходимости степенного ряда всегда содержит, по крайней мере, одну точку $x = 0$ для ряда (6.2) или $x = x_0$ для ряда (6.3).

Теорема 6.1 (теорема Абеля). Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при некотором значении x_0, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всех значениях x таких, что $|x| < |x_0|$.

Доказательство. По условию ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, следовательно, по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Отсюда следует, что последовательность $\{a_n x_0^n\}$ ограничена, т.е. найдется такое число *M*, что для всех n выполняется неравенство $|a_n x_0^n| \le M$, $n = 0, 1, 2, ...$.

Ряд (6.2) перепишем в виде

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + ... + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + ...$$

и рассмотрим ряд из модулей его членов:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + ... + |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + ... \tag{6.4}$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда $M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + ... + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + ...$ Последний ряд представляет собой геометрическую прогрессию и сходится, если его знаменатель $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, т.е. $|x| < |x_0|$; следовательно, по признаку сравнения будет сходиться ряд (6.4), а значит ряд (6.2) сходится абсолютно.

Следствие. Если ряд (6.2) расходится при некотором значении $x = x_1$, то он расходится для всех x таких, что $|x| > |x_1|$.

Действительно, допустим, что ряд (6.2) сходится в точке x_2 и $|x_2|>|x_1|$, тогда по теореме Абеля ряд сходится при всех x, для которых $|x|<|x_2|$, и, в частности, в точке x_1, что противоречит условию.

Из теоремы Абеля следует, что существует такое число $R\geq 0$, что при $|x|<R$ ряд (6.2) сходится, а при $|x|>R$ – расходится. Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда, а интервал $(-R;R)$ – ***интервалом сходимости***. На концах интервала сходимости, т.е. при $x=-R$ и $x=R$, ряд может как сходиться, так и расходиться.

Замечания:

1. При $R=0$ степенной ряд (6.2) сходится только в одной точке $x=0$.
При $R=\infty$ ряд сходится на всей числовой оси.

2. Интервал сходимости степенного ряда (6.3) находят из неравенства $|x-x_0|<R$; он имеет вид: $(x_0-R;\ x_0+R)$.

3. Область сходимости удобно находить, применяя признак Даламбера для ряда из модулей.

Пример 6.1. Найти область сходимости ряда $x-\frac{x^3}{4}+\frac{x^5}{4^2}-\frac{x^7}{4^3}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{4^n}+...$.

Решение. Применим признак Даламбера для ряда из модулей:

$$|u_n|=\frac{|x^{2n+1}|}{4^n},\quad |u_{n+1}|=\frac{|x^{2n+3}|}{4^{n+1}},\qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+3}|\cdot 4^n}{4^{n+1}\cdot|x^{2n+1}|}=\frac{|x^2|}{4}=\frac{x^2}{4}\ .$$

Ряд абсолютно сходится, если $\frac{x^2}{4}<1$, $x^2<4$, $|x|<2$ или $-2<x<2$.

При $x=-2$ имеем ряд: $-2+\frac{2^3}{4}-\frac{2^5}{4^2}+\frac{2^7}{4^3}-...=-2+2-2+2-...$.

При $x=2$ имеем ряд: $2-2+2-2$.

В обоих случаях $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ не существует, следовательно, по необходимому признаку сходимости, ряды расходятся.

Таким образом, область сходимости исходного ряда есть интервал $(-2;\,2)$.

Пример 6.2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2\,2^n}$.

Решение. Применим признак Даламбера для ряда из модулей:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^2\,2^{n+1}}:\frac{(x-3)^n}{n^2\,2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)\,n^2}{2\,(n+1)^2}\right|=\frac{|x-3|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{|x-3|}{2}\ .$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится, если $|x-3|<2$, или $-2<x-3<2$, т.е. $1<x<5$.

При $x=5$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^2\,2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который является сходящимся ($p=2>1$).

При $x=1$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2\,2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$, который сходится абсолютно. Таким образом, область сходимости данного ряда $[1;5]$.

Пример 6.3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$.

Решение. Область сходимости ряда находим, применяя признак Даламбера к ряду из модулей:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(2n+2)!}:\frac{x^n}{(2n)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\,(2n)!}{(2n+2)!}\right|=|\,x\,|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(2n+2)(2n+1)}=0\,.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ для любого $x\in R$, то исходный ряд сходится абсолютно на всей числовой оси.

Пример 6.4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x+2)^n$.

Решение. К ряду из модулей применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(x+2)^{n+1}}{3^{n+1}}:\frac{n!(x+2)^n}{3^n}\right|=\frac{|\,x+2\,|}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty \text{ при } x\neq-2\,.$$

Отсюда, степенной ряд сходится только в одной точке $x=-2$.

Перечислим свойства степенных рядов, не доказывая их.

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (2.2) является непрерывной функцией в интервале сходимости.
2. Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости:

$$\int_a^x S(x)\,dx=\int_a^x a_0\,dx+\int_a^x a_1x dx+\int_a^x a_2x^2\,dx+...+\int_a^x a_nx^n\,dx+....$$

3. В интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать:

$$S'(x)=a_1+2\,a_2x+3a_3x^2+...+n\,a_nx^{n-1}+....$$

При этом после интегрирования и дифференцирования полученные ряды имеют тот же радиус сходимости.

Примеры для самостоятельного решения

Найти область сходимости степенных рядов:

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+3}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3}$. 4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}x^n$.

Ответы: 1. $[-1;1)$. 2. $(-2;4)$. 3. $[-3;-1]$. 4. $(-\infty;+\infty)$.

6.3. Разложение функций в степенные ряды

Известно, что для функции $f(x)$, имеющей производные до $(n+1)$–го порядка включительно в окрестности точки x_0, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\,, \qquad (6.5)$$

где остаточный член $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ c\in(x_0;x)$.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки x_0 и остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n\to\infty$, то из формулы Тейлора (6.5) получим разложение функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$, которое называют ***рядом Тейлора***:

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots}\,. \qquad (6.6)$$

При $x_0=0$ получим разложение функции $f(x)$ по степеням x, которое называют ***рядом Маклорена***:

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots}\,. \qquad (6.7)$$

Отметим, не доказывая, что для каждой из элементарных функций остаточный член $R_n(x)$ в формуле Тейлора стремится к нулю при $n\to\infty$ в некотором интервале, т.е. функция разлагается в ряд Тейлора.

Приведём разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций:

1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;+\infty),\qquad (6.8)$

2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;+\infty),\qquad (6.9)$

3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;+\infty),\qquad (6.10)$

4) $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\ x\in(-1;\,1),\qquad (6.11)$

5) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\ldots,\qquad x\in(-1;\,1].\qquad (6.12)$

Замечания: 1) сходимость ряда (6.11) при $x=\pm1$ зависит от значения m;
2) ряд (6.12) при $x=1$ сходится по признаку Лейбница.

При разложении в ряд более сложных функций используют либо непосредственно формулу (6.7), либо полученные разложения (6.8) – (6.12).

Пример 6.5. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\ln\left(4+x^2\right)$.

Решение. Так как $f(x)=\ln\left(4+x^2\right)=\ln 4\left(1+\dfrac{x^2}{4}\right)=\ln 4+\ln\left(1+\dfrac{x^2}{4}\right)$ то, заменив в формуле (6.12) x на $x^2/4$, получим

$$\ln\left(4+x^2\right)=\ln 4+\frac{x^2}{4}-\frac{\left(x^2/4\right)^2}{2}+\frac{\left(x^2/4\right)^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\left(x^2/4\right)^n}{n}+\ldots=$$

$$=\ln 4+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4^2\cdot 2}+\frac{x^6}{4^3\cdot 3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{4^{n+1}\cdot n}+\ldots.$$

Полученный ряд сходится, если $-1<\dfrac{x^2}{4}\le 1$, или $x^2\le 4$, или $-2\le x\le 2$.

Пример 6.6. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{x}{2-x}$.

Решение. Так как $f(x)=\dfrac{x}{2-x}=x\cdot\dfrac{1}{2-x}=x\cdot\dfrac{1}{2\,(1-x/2)}=\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1-x/2}$ то, заменив x на $(-x/2)$ в разложении (6.11) при $m=-1$, получим

$$\frac{x}{2-x}=\frac{x}{2}\cdot\left(1-(-x/2)+(-x/2)^2-(-x/2)^3+\ldots+(-1)^n(-x/2)^n+\ldots\right)=$$
$$=\frac{x}{2}\cdot\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right)=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}+\ldots .$$

Полученный ряд сходится, если $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, т.е. $-2<x<2$.

Пример 6.7. Разложить функцию $f(x)=e^{2x}$ по степеням $(x-1)$.

Решение. Запишем функцию $f(x)$ в виде $f(x)=e^{2x}=e^{2(x-1)+2}=e^2\cdot e^{2(x-1)}$.

Заменив в формуле (6.8) x на $2(x-1)$, получим

$$e^{2x}=e^2\cdot\left(1+2(x-1)+\frac{(2(x-1))^2}{2!}+\frac{(2(x-1))^3}{3!}+\ldots+\frac{(2(x-1))^n}{n!}+\ldots\right)=$$
$$=e^2\cdot\left(1+2(x-1)+\frac{2^2(x-1)^2}{2!}+\frac{2^3(x-1)^3}{3!}+\ldots+\frac{2^n(x-1)^n}{n!}+\ldots\right).$$

Ряд сходится при $x\in(-\infty;\infty)$.

Примеры для самостоятельного решения

Разложить в степенной ряд по степеням x функции; найти область сходимости:

1. $y=\frac{1-e^{-x}}{x}$. 2. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$. 3. $y=\sin^2 x$. 4. $y=\cos x^2$.

Ответы: 1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n!}$, $x\in R$. 2. $2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x|<1$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $x\in R$. 4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}$, $x\in R$.

6.4. Применение рядов в приближенных вычислениях

Степенные ряды имеют самые разнообразные приложения. С их помощью можно вычислять значения функций с любой степенью точности, неопределенные и определенные интегралы; интегрировать дифференциальные уравнения.

Приближённые вычисления значений функции

Пример 6.8. Вычислить $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ с точностью до 0,001.

Решение. Согласно формуле (6.8) $e^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2\cdot 2!}-\frac{1}{3^3\cdot 3!}+\frac{1}{3^4\cdot 4!}-\ldots$. Так как $\frac{1}{3^3\cdot 3!}\approx 0{,}006>0{,}001$, а $\frac{1}{3^4\cdot 4!}\approx 0{,}0005<0{,}001$, то для остатка знакочередующегося ряда имеем: $|S-S_4|=|R_4|<\frac{1}{3^4\cdot 4!}<0{,}001$ (по следствию из теоремы 5.6). Поэтому

$$e^{-\frac{1}{3}}\approx S_4=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2\cdot 2!}-\frac{1}{3^3\cdot 3!}=0{,}717 .$$

Пример 6.9. Вычислить $\ln 0{,}8$ с точностью до 0,0001.

Решение. Запишем ряд (6.13) при $x=-0{,}2$:

$$\ln 0{,}8=-0{,}2-\frac{0{,}2^2}{2}-\frac{0{,}2^3}{3}-\frac{0{,}2^4}{4}-\ldots=-\left(0{,}2+0{,}02+0{,}00266+0{,}0004+\ldots\right).$$

В скобках стоит знакоположительный ряд. Оценим ошибку вычисления R_n, которую мы допустим, если возьмём четыре члена ряда:

$$R_n = \frac{0,2^5}{5} + \frac{0,2^6}{6} + \frac{0,2^7}{7} + \ldots < \frac{0,2^5}{5} + \frac{0,2^6}{5} + \frac{0,2^7}{5} + \ldots = \frac{0,2^5}{5} \cdot \frac{1}{1-0,2} = 0,00008 < 0,0001,$$

т.е. $R_n < 0,0001$. Следовательно, $\ln 0,8 \approx -\left(0,2 + 0,02 + 0,00266 + 0,0004\right) = -0,2231$.

Приближённые вычисления определенных интегралов

Некоторые определённые интегралы являются слишком сложными для вычислений или первообразная подынтегральной функции не выражается через элементарные функции. Иногда такие интегралы удобно вычислять с помощью рядов. Поясним это на примерах.

Пример 6.10. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,0001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, используя формулу (6.9).

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots .$$

Интегрируем:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \frac{x^7}{7!\cdot 7} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \frac{1}{7!\cdot 7} + \ldots$$

Так как $\frac{1}{5!\cdot 5} \approx 0,00166 > 0,0001$, а $\frac{1}{7!\cdot 7} \approx 0,00003 < 0,0001$, то с точностью до 0,0001

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} = 0,9461.$$

Пример 6.11. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл $\int\limits_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\, dx$.

Решение. Получим разложение подынтегральной функции в степенной ряд. Для этого в формуле (6.12) положим $m = \frac{1}{2}$ и заменим x на x^3:

$$\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^6}{2!} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^9}{3!} + \ldots = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 2!} + \frac{3x^9}{2^3\cdot 3!} - \ldots .$$

Этот ряд сходится при $-1 < x < 1$. Промежуток интегрирования $[0;\ 1/2]$ принадлежит интервалу сходимости ряда. Поэтому

$$\int\limits_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\, dx = \int\limits_0^{1/2} \left(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 2!} + \frac{3x^9}{2^3\cdot 3!} - \ldots \right) dx =$$

$$= \left(x + \frac{x^4}{4\cdot 2} - \frac{x^7}{7\cdot 2^2\cdot 2!} + \frac{3x^{10}}{10\cdot 2^3\cdot 3!} - \ldots \right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4\cdot 8} - \frac{1}{2^7\cdot 56} + \ldots .$$

Так как $\frac{1}{2^4\cdot 8} \approx 0,0078 > 0,001$, а $\frac{1}{2^7\cdot 56} \approx 0,00013 < 0,001$, то интеграл $\int\limits_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\, dx \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4\cdot 8} \approx 0,508$ с точностью до 0,001.

Интегрирование дифференциальных уравнений

Степенные ряды находят применение при интегрировании дифференциальных уравнений, когда их невозможно решить известными методами. Рассмотрим один из способов решения дифференциального уравнения, используя разложение решения в ряд Тейлора.

Пример 6.12. Найти первые пять членов (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения $y'' = xy + y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Решение. Решение данного уравнения ищем в виде ряда Тейлора по степеням x:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots .$$

Из начальных условий $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$. Значение $y''(0)$ найдем из дифференциального уравнения: $y''(0) = 0 \cdot 1 + (-1)^2 = 1$. Чтобы найти следующие коэффициенты ряда, продифференцируем исходное уравнение $y'' = xy + y^2$:

$$y''' = y + xy' + 2yy', \qquad y^{IV} = y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' = 2y' + xy'' + 2(y')^2 + 2yy''.$$

При $x = 0$ получим:

$$y'''(0) = 1 + 0 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -1, \quad y^{IV}(0) = 2 \cdot (-1) + 0 + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Подставив значения производных в искомый ряд, получим:

$$y(x) = 1 + \frac{(-1)}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{2}{4!}x^4 + \dots \quad \text{или} \quad y(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots .$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить приближенно с точностью до 0,001

1. $\frac{1}{e}$ 2. $\sin 1$ 3. $\sqrt[3]{30}$ 4. $\ln 1{,}2$ 5. $\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx$ 6. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ 7. $\int_0^1 \sin x^2 dx$ 8. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Ответы:

1. 0,368. 2. 0,832. 3. 3,103. 4. 0,183. 5. 0,461. 6. 0,764. 7. 0,309. 8. 0,497.

7. Ряды Фурье

7.1. Периодические функции

Периодические процессы, встречающиеся в природе, технике, описываются периодическими функциями.

Функция $f(x)$ называется периодической с периодом $T > 0$ (или T — периодической), если для всех значений x выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x).$$

Отметим некоторые свойства периодической функции.

1. Если функция $f(x)$ есть периодическая с периодом T, то функция $f(ax)$ является тоже периодической с периодом T/a.

2. Алгебраическая сумма периодических функций, имеющих период T, есть периодическая функция с периодом T.

3. Если периодическая функция с периодом T интегрируема на любом конечном отрезке, то при любых a и b

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx. \quad \text{В частности,} \quad \int_0^T f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx.$$

Простейшими периодическими функциями являются ***простые гармоники***

$$y = A\sin\left(\omega x + \varphi_0\right), \tag{7.1}$$

где $|A|$ — амплитуда, ω — частота, φ_0 — начальная фаза. В механике функция (7.1) описывает гармонические колебания точки, у которой период колебаний равен $2\pi/\omega$. Проведём преобразование этой функции:

$$y = A\sin\left(\omega x + \varphi_0\right) = A\sin\omega x \cdot \cos\varphi_0 + A\cos\omega x \cdot \sin\varphi_0 = a\cos\omega x + b\sin\omega x,$$

где $a = A\sin\varphi_0$, $b = A\cos\varphi_0$. Таким образом, простая гармоника имеет вид:

$$y = A\sin\left(\omega x + \varphi_0\right) = a\cos\omega x + b\sin\omega x.$$

При наложении простых гармоник получается сложное гармоническое колебание, которое описывается функцией вида

$$\varphi\left(x\right) = a_0 + (a_1\cos\omega x + b_1\sin\omega x) + (a_2\cos 2\omega x + b_2\sin 2\omega x) + \ldots + (a_k\cos k\omega x + b_k\sin k\omega x)$$

$$\text{или} \quad \varphi\left(x\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n\cos n\omega x + b_n\sin n\omega x.$$

Период функции $y = a_0$ есть любое число, период первой гармоники $y = a_1\cos\omega x + b_1\sin\omega x$ равен $2\pi/\omega$, второй — $2\pi/2\omega$, третьей — $2\pi/3\omega$, k-й — $2\pi/k\omega$. Следовательно, сложное колебание имеет период $2\pi/\omega$.

При неограниченном возрастании n получим ряд, который обычно записывают в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\omega x\right) + b_n\sin\left(n\omega x\right)$$

и называют тригонометрическим рядом; постоянные числа a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ называют коэффициентами ряда. Свободный член ряда записан в виде $a_0/2$ для единообразия получающихся в дальнейшем формул. Если ряд сходится, то его сумма $S(x)$ является $2\pi/\omega$-периодической функцией.

Возникает вопрос: можно ли произвольную периодическую функцию представить в виде суммы простых гармоник? Оказывается, что если взять конечную сумму гармоник, то для большинства функций этого сделать нельзя, но если рассмотреть сумму бесконечного числа гармоник, то эта задача может быть решена для многих периодических функций.

7.2. Разложение периодических функций в ряд Фурье

Пусть $f(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом $2l$. Предположим, что $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, т.е. является его суммой:

$$4. \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\omega x\right) + b_n\sin\left(n\omega x\right) \tag{7.2}$$

Так как сумма есть $2\pi/\omega$ — периодическая функция, то $2l = 2\pi/\omega$ и $\omega = \pi/l$.

Если равенство (7.2) выполняется во всех точках непрерывности функции $f(x)$, то ряд, стоящий в правой части этого равенства, называется ***рядом Фурье*** функции $f(x)$, а сама функция называется разложимой в ряд Фурье.

Любая ли $2l$ — периодическая функция разлагается в ряд Фурье? Какая связь между коэффициентами a_0, a_n, b_n и функцией $f(x)$? Ответы на эти вопросы дают следующие две теоремы.

Теорема 7.1 (Дирихле). Если $2l$ - периодическая функция $f(x)$ является кусочно-монотонной и ограниченной на отрезке $[-l,l]$, то:

1) функция $f(x)$ разложима в ряд Фурье;
2) в каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда Фурье $S(x)$ равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ слева и справа, т.е.:
$$S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0-0)}{2};$$
3) ряд Фурье можно почленно интегрировать.

Доказательство не приводим.

Теорема 7.2 (о коэффициентах ряда Фурье). Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то коэффициенты её ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$\boxed{\begin{aligned} &a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,\\ &a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\omega x\,dx, \quad n=1,2,3...\\ &b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\omega x\,dx, \quad n=1,2,3...\end{aligned}} \tag{7.3}$$

Доказательство. Запишем разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье (7.2):
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x).$$

Для нахождения a_0 проинтегрируем это равенство в пределах от $-l$ до l:
$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\int_{-l}^{l}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} a_n\cos(n\omega x)\,dx+\int_{-l}^{l} b_n\sin(n\omega x)\,dx\right). \tag{7.4}$$

Учитывая, что $\omega=\pi/l$, получим
$$\int_{-l}^{l}\cos(n\omega x)\,dx=\left.\frac{\sin(n\omega x)}{n\omega}\right|_{-l}^{l}=\frac{1}{n\omega}\big(\sin(n\omega l)+\sin(n\omega l)\big)=\frac{2\sin(n\pi)}{n\omega}=0 \quad (n\neq 0).$$

Аналогично, $\int_{-l}^{l}\sin(n\omega x)\,dx=0$. Тогда из равенства (7.4)
$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\int_{-l}^{l}\frac{a_0}{2}dx=a_0 l \qquad \text{или} \qquad a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx.$$

Далее умножим обе части равенства (7.2) на $\cos(k\omega x)$ и также проинтегрируем в пределах от $-l$ до l:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\omega x\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos k\omega x\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos n\omega x\cos k\omega x\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin n\omega x\cos k\omega x\,dx\right) = a_k\cdot l. \quad (7.5)$$

Здесь мы учли, что при любых $k, n \in Z$

$$\int_{-l}^{l}\cos(n\omega x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos(k-n)\omega x + \cos(k+n)\omega x\right)dx = \begin{cases}0, & k\neq n\\ l, & k=n\end{cases},$$

$$\int_{-l}^{l}\sin(n\omega x)\cos(k\omega x)\,dx = 0.$$

Из равенства (7.5) следует

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(k\omega x)\,dx, \quad k = 1, 2, 3...$$

Аналогично, умножая равенство (7.2) на $\sin(k\omega x)$ и интегрируя его в пределах от $-l$ до l, найдём $b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(k\omega x)\,dx, \quad k = 1, 2, 3...$

Теорема доказана.

Коэффициенты a_0, a_n, b_n, определяемые по формулам (7.3), называются коэффициентами Фурье.

Замечание. Иногда удобно вычислять интегралы в формулах (7.3) не по отрезку $[-l, l]$, а по другому промежутку длиной $2l$ (в силу свойства периодических функций).

Пример 7.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом $2l = 4$, заданную на отрезке $[-2, 2]$ формулой $f(x) = \begin{cases}2, & -2 < x < 0,\\ 1, & 0 \le x \le 2.\end{cases}$ Построить график суммы ряда.

Решение. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле (см. рис.2). Ряд Фурье (7.2) для заданной функции при $l = 2$, будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x), \quad \omega = \frac{\pi}{l} = \frac{\pi}{2}.$$

По формулам (7.3) находим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} dx = 3,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi n}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\cos\frac{\pi n}{2}x\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\frac{\pi n}{2}x\,dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{\pi n}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\sin\frac{\pi n}{2}x dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sin\frac{\pi n}{2}x\,dx = \frac{1}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right).$$

Запишем искомый ряд Фурье для функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)\sin\frac{\pi n}{2}x = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + ...\right)$$

Сумма ряда Фурье $S(x)$ совпадает с функцией $f(x)$ в точках непрерывности. Значение суммы ряда $S(x)$ в точках разрыва $x = 2n \quad (n = 0, 1, 2,...)$ равно

$$S(2n)=\frac{f(2n-0)+f(2n+0)}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}.$$

График $S(x)$ показан на рис.3.

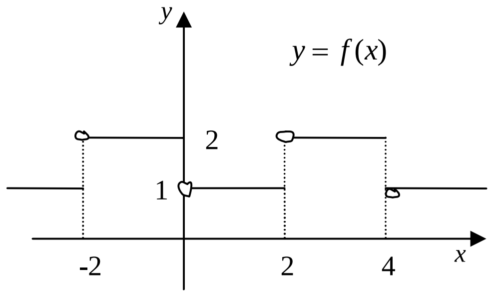

Рис.2

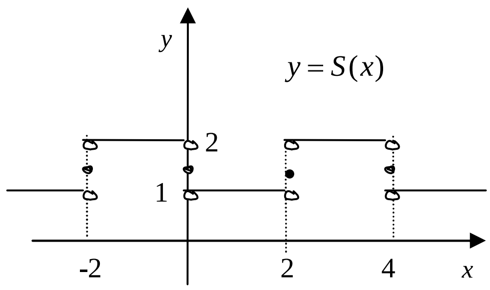

Рис.3

Пример 7.2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$, $x\in[0,2\pi]$, $T=2\pi$ (рис.4).

Решение. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле (рис.4). Ряд Фурье для данной функции при $l=\pi$, $\omega=\pi/l=1$ будет иметь вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx\ .$$

Найдем коэффициенты ряда по формулам (7.3), вычисляя интегралы по промежутку $[0,2\pi]$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xdx=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{2}{n}.$$

Таким образом, искомый ряд для функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}\sin nx=\pi-2\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\right).$$

Сумма ряда Фурье $S(x)$ совпадает с функцией $f(x)$ в точках непрерывности. Сумма ряда $S(x)$ в точках разрыва $x=2\pi n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ равна

$$S(2\pi n)=\frac{f(2\pi n+0)+f(2\pi n-0)}{2}=\frac{2\pi+0}{2}=\pi\ .$$

График суммы $S(x)$ ряда Фурье показан на рис.5.

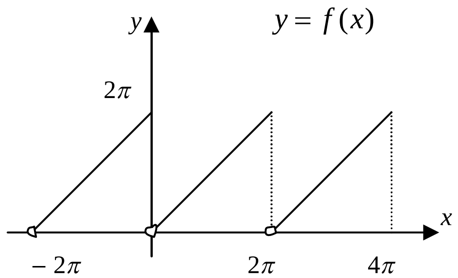

Рис.4

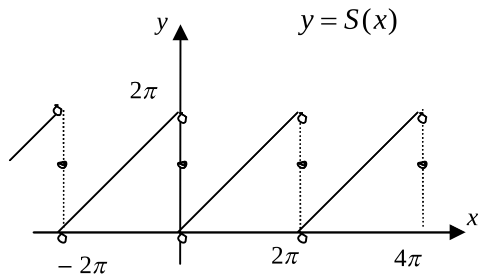

Рис.5

7.3. Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций

Известно, что $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, если $f(x)$ — нечётная функция;

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx \text{ , если } f(x) \text{ — чётная функция.}$$

Пусть в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ раскладывается нечётная функция $f(x)$. Тогда коэффициенты ряда Фурье вычисляются следующим образом:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos(n\omega x)\,dx = 0, \quad n = 1,2,3...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin(n\omega x)dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin(n\omega x)\,dx, \quad n = 1,2,3...$$

Таким образом, ряд Фурье для нечётной функции будет иметь вид:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x),} \quad \text{где} \quad \boxed{b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin(n\omega x)\,dx, \quad \left(\omega = \frac{\pi}{l}\right).} \qquad (7.5)$$

Если в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ раскладывается чётная функция $f(x)$, то $f(x)\cos(n\omega x)$ — чётная функция, а $f(x)\sin(n\omega x)$ — нечётная функция. Тогда коэффициенты ряда Фурье вычисляются следующим образом:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos(n\omega x)\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos(n\omega x)\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin(n\omega x)\,dx = 0.$$

Следовательно, ряд Фурье для чётной функции будет иметь вид

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x),} \quad \text{где} \quad \boxed{a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx, \ a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos(n\omega x)\,dx.} \qquad (7.6)$$

Ряды (7.5) и (7.6) называются неполными тригонометрическими рядами или рядами по синусам и косинусам соответственно.

Пример 7.3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, $-3 \le x \le 3$ с периодом $2l = 6$.

Решение. Функция $f(x)$ — чётная и удовлетворяет условиям теоремы Дирихле (рис.6). Ряд Фурье для чётной функции при $l = 3$ имеет вид (7.6):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x), \quad \omega = \frac{\pi}{3} \ .$$

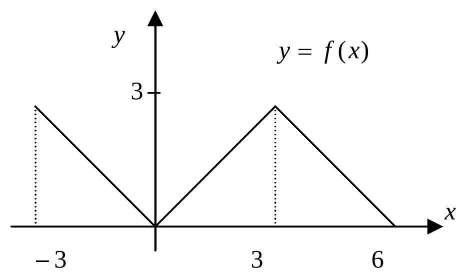

Рис.6

Найдем коэффициенты разложения по формулам (7.6):

$$a_0 = \frac{2}{3}\int\limits_{0}^{3} f(x)dx = \frac{2}{3}\int\limits_{0}^{3} xdx = 3,$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos n\omega x dx=\frac{2}{3}\int_0^3 x\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{2}{3}\left(x\frac{3}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{3}+\frac{9}{(\pi n)^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{6}{n^2\pi^2\left((-1)^2-1\right)}.$$

Поэтому $f(x)=\frac{3}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left((-1)^2-1\right)\cos\frac{n\pi x}{3}=\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{3}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{3}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{3}+...\right).$

Так как $f(x)$ непрерывная функция при $x\in(-\infty,\infty)$, то $S(x)=f(x)$

7.4. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на отрезке

Пусть на некотором отрезке $[a,b]$ задана кусочно-монотонная функция $f(x)$. Такую функцию также можно разложить в ряд Фурье. Для этого нужно построить периодическую функцию $f_1(x)$ с периодом $2l=|b-a|$, совпадающую с функцией $f(x)$ на $[a,b]$ (рис.7).

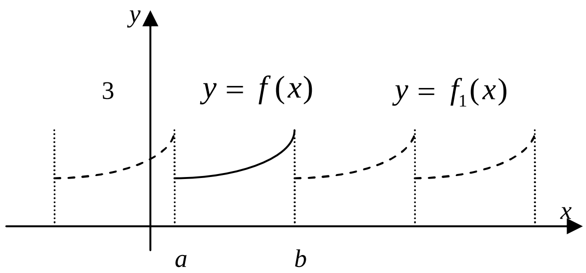

Рис.7

Ряд Фурье функции $f_1(x)$ имеет сумму, совпадающую с функцией $f(x)$ на $[a,b]$ (кроме точек разрыва). Следовательно, функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье на отрезке $[a,b]$.

Если функция задана на отрезке $[0,l]$, то:

а) функцию можно продолжить периодически с периодом $T=l$; тогда ряд Фурье для $f(x)$ будет иметь вид (7.2);

б) функцию можно продолжить чётным образом на отрезок $[-l,0]$ (рис.8). Тогда ряд Фурье для $f(x)$ будет содержать только косинусы и иметь вид (7.7);

в) функцию можно продолжить нечётным образом на отрезок $[-l,0]$ (рис.9). Тогда ряд Фурье для $f(x)$ будет содержать только синусы и иметь вид (7.5).

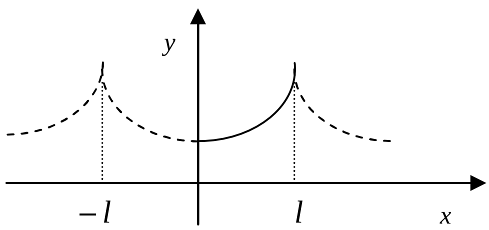

Рис.8

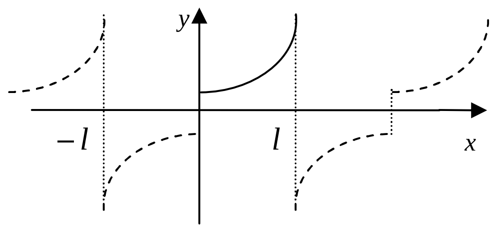

Рис.9

Таким образом, для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0,l]$, можно получить различные разложения в ряд Фурье. Но все эти ряды имеют сумму, равную $f(x)$ на отрезке $[0,l]$ (кроме точек разрыва).

Пример 7.4. Разложить функцию $f(x)=1-x$, $0<x<1$ в ряд Фурье по синусам.

Решение. Продолжим функцию $f(x)$ нечётным образом на отрезок $[-1;0]$ (рис.10); получим функцию $f_1(x)$ периода $2l=2$, удовлетворяющую условиям теоремы Дирихле. Для нечетной функции $f_1(x)$ ряд Фурье при $l=1$ имеет вид (7.5):

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega x,\quad \omega=\frac{\pi}{l}=\pi\ .$$

Вычислим b_n по формуле (7.5):

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\omega x dx = 2\int_0^1 (1-x)\sin n\pi x dx = -2\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Bigg|_0^1 - 2\left(-\frac{x\cos n\pi n}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{n\pi}.$$

Отсюда, на отрезке $[0;1]$ справедливо равенство

$$1-x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x = \frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x + \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \ldots\right).$$

Сумма полученного ряда совпадает с функцией $f(x)$ при всех значениях $x \in (0;1)$.

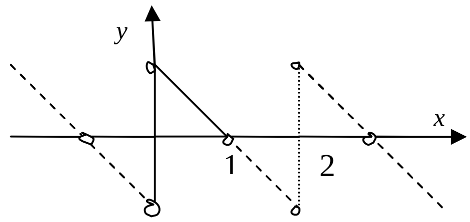

Рис. 10

Примеры для самостоятельного решения

1. Разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$ функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x \le 0, \\ -2, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

2. Разложить функцию $f(x) = 2x$ в интервале $(0;1)$ в ряд синусов.

3. Разложить в ряд Фурье в интервале $(-2;2)$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x \le 0, \\ 0, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Ответы: 1. $-\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. 2. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n^2}$.

3. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^{n+1}-1\right)\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n\pi}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$.

Библиографический список

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике /Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч.2. 252 с.
2. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики /И.П. Натансон. СПб.: Изд-во «Лань», 2003. 736 с.
3. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики /Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. М.: Изд-во «Астрель», 2003. 654 с.
4. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев . М.: Наука, 1980. 946 с.
5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа /Г.Н. Берман. М.: Наука, 2002. 443 с.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.
7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М.: Высш. шк.,1998. Ч.2. 304 с.

Оглавление

Учебно-методическое издание

Нелля Михайловна Кравченко

Дифференциальные уравнения и ряды

Редактор *Н.П. Кубыщенко*
Компьютерная верстка *Т.С. Трясциной, Р.М. Миньковой*

Подисано в печать 25. 08. 2005 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ.л. 3.06
Уч.-изд. л. 2.8 Тираж Заказ Цена "С"

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19

ООО «Издательство УМЦ УПИ»
620002, Екатеринбург, Мира, 17